A szorzatmérhetőség, vagyis a $(t,\omega) \mapsto X(t,\omega)$ kétváltozós függvény mérhetősége a folytonos időparaméterű sztochasztikus folyamatok esetén túl gyenge feltétel. Ezt helyettesíti az úgynevezett progresszíven való mérhetőség, amely a szorzatmérhetőség és az adaptáltság fogalmát ötvözi.

1. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}$ filtráció. Az $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmazt az $\mathcal{F}$ filtráció szerint progresszíven mérhetőnek mondjuk, ha minden $t \geq 0$ esetén*

$$A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t.$$

Egy X folyamat progresszíven mérhető, ha mint kétváltozós függvény mérhető a progresszíven mérhető halmazok $\mathcal{R}$ σ-algebrájára nézve.

2. Példa. *Szorzatmérhető folyamat, amely nem progresszíven mérhető.*

Legyen $\Theta \mathrel{\hat{=}} \Omega \mathrel{\hat{=}} [0,1]$, a σ-algebra mind a két halmazon legyen $\mathcal{B}([0,1])$. Az $\mathcal{F}$ filtráció minden t-re álljon a $[0,1]$ egy pontból álló halmazai által generált σ-algebra halmazaiból, és legyen

$$X(t,\omega) \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t = \omega \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq \omega \end{cases}.$$

A $\Delta \mathrel{\hat{=}} \{(t,\omega) : t = \omega\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$ átló nem $\mathcal{B}(\Theta) \times \mathcal{F}_t$ mérhető[1], és ezért az X nem progresszíven mérhető, de $\mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1])$ mérhető, és adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{P}$ a Lebesgue-mérték, akkor az X ekvivalens az $\eta = 0$ progresszíven mérhető folyamattal, vagyis a X-hez található olyan Y progresszíven mérhető folyamat, hogy minden t-re az $X(t)$ és az $Y(t)$ valószínűségi változók ugyanabba az osztályba tartoznak.

□

3. Példa. *Ha az X adaptált folyamat minden realizációja minden időpontban vagy balról vagy jobbról folytonos, akkor az X progresszíven mérhető*[2].

Jelölje $\mathcal{F}$ a filtrációt. Tegyük fel, hogy a folyamat trajektóriái jobbról folytonosak. Az egyszerűbb jelölés végett vegyük a $[0,\infty)$ intervallumot, és rögzítsünk le egy $t > 0$ időpontot. Jelölje X a leszűkített folyamatot. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra osszuk fel a $[0,t]$ intervallumot 2^n részre, és

$$X_n(s,\omega) \mathrel{\hat{=}} \begin{cases} X\left(\frac{kt}{2^n},\omega\right) & \text{ha} \quad s \in \left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right] \\ X(0,\omega) & \text{ha} \quad s = 0 \end{cases}.$$

[1] A példa szokásos megfogalmazása szerint a parciális mérhetőségből nem következik a szorzat mérhetőség. Ha a folyamat szorzat mérhető lenne, akkor a $[0,1/2] \times \Omega \cap \Delta$ szorzat mérhető halmaz Ω vetületének, vagyis a $[0,1/2]$ halmaznak, mérhetőnek kellene lenni.

[2] A balról illetve a jobbról való folytonosság nem kimenetenként értendő, hanem az egész folyamatra nézve vagy az egyik vagy a másik oldali folytonosságnak kell teljesülnie. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy szinte kivétel nélkül mindig feltesszük, hogy a trajektóriák regulárisak, vagyis nincs másodfajú szakadásuk, és valamelyik oldalról folytonosak. Ennek megfelelően a progresszív mérhetőség igen enyhe megkötés. Mivel az $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{A}$ filtrációra minden sztochasztikus folyamat adaptált, ezért speciálisan minden, az időparaméter szerint jobbról, vagy balról folytonos folyamat szorzatmérhető.

Mivel az $s \mapsto \mathcal{F}_s$ monoton, ezért az X_n közelítő folyamat $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető. A feltételezett jobbról való folytonosság miatt, ha $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} X_n(s,\omega) = X(s,\omega),$$

ezért az X is $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető. A bizonyítás csekély módosításával, az X_n definíciójában az intervallum másik végpontját megadva, az állítás igazolható akkor is, ha az X balról folytonos.

□

4. Állítás. *Legyen V jobbról reguláris és adaptált folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy a V mindegyik trajektóriája véges változású, vagyis az összes $[0,t]$. kompakt időszakaszon az összes trajektória korlátos változású.*

1. *Ha minden ω kimenetelre az $X(\omega)$ trajektóriák a $V(\omega)$ mértékre nézve az összes véges időszakaszon integrálhatóak, akkor az*

$$\begin{aligned} Y(t,\omega) &\doteq \int_0^t X(s,\omega)\, V(ds,\omega) \doteq \\ &\doteq \int_{(0,t]} X(s,\omega)\, V(ds,\omega) \end{aligned} \tag{1}$$

   parametrikus integrálok jobbról regulárisak. Speciálisan ez a tulajdonság teljesül, ha az X trajektóriái regulárisak.

2. *Ha az X progresszíven mérhető, akkor az Y adaptált.*

Bizonyítás: Az állítás első fele a majorált konvergencia tétel közvetlen következménye. Például

$$\begin{aligned} Y(t+) &= \lim_{h \searrow 0} Y(t+h) = \lim_{h \searrow 0} \int_0^{t+h} X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\ &= \lim_{h \searrow 0} \int_0^{t+1} \chi((0,t+h])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\ &= \int_0^{t+1} \lim_{h \searrow 0} \chi((0,t+h])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\ &= \int_0^{t+1} \chi((0,t])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \int_0^t X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\ &= Y(t). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel a V nem determinisztikus, az állítás második felének igazolásához nem alkalmazhatjuk közvetlenül a Fubini-tételt, de a Fubini-tétel bizonyításának gondolatmenete értelemszerűen kiterjeszthető erre az esetre is. Jelölje $\mathcal{H}$ az olyan korlátos folyamatok családját, amelyre az (1) sorban szereplő $Y(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_t$-mérhető. Mivel a feltétel szerint a véges időszakaszokon a V korlátos változású, ezért az általa generált mérték minden kimenetelre minden véges időszakon véges, így a korlátos függvények integrálhatóak, következésképpen a $\mathcal{H}$ lineáris tér és a $\mathcal{H}$, tartalmazza a konstans $X \equiv 1$ folyamatot. Ha $0 \leq H_n \in \mathcal{H}$ és $H_n \nearrow H$ és a H korlátos, akkor a monoton, vagy a domináns konvergencia tétel miatt $H \in \mathcal{H}$. Ebből következően a $\mathcal{H}$ egy λ-rendszer. Ha $C \in \mathcal{F}_t$ és $s_1, s_2 \leq t$, valamint $B \circeq (s_1, s_2] \times C$, akkor felhasználva, hogy a V a feltétel szerint adaptált a

$$\int_0^t \chi_B dV = \chi_C \left[V(s_2) - V(s_1)\right]$$

parametrikus integrál $\mathcal{F}_t$-mérhető. A $\chi_C \chi((s_1, s_2])$ alakú folyamatok π-rendszert alkotnak, így a monoton osztály tétel miatt a $\mathcal{H}$ tartalmazza a $\chi_C \chi((s_1, s_2])$ alakú függvények által generált σ-algebrát. Mivel a $C \in \mathcal{F}_t$ tetszőleges lehet ezért az említett π-rendszer éppen a $\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t$ szorzatmérhető halmazokból álló σ-algebrát generálja. Az X progresszíven mérhető, így a $[0,t]$ szakaszra való leszűkítése $(\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t)$-mérhető. Következésképpen az állítás teljesül, ha az X korlátos és progresszíven mérhető.Ebből az általános eset a majorált konvergencia tételből már következik.

□

5. Állítás. *Ha X progresszíven mérhető és τ tetszőleges megállási idő, akkor az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, és az X^τ megállított folyamat progresszíven mérhető.*

Bizonyítás: Az állítás első fele közvetlen következménye a másodiknak, ugyanis ha B egy Borel-mérhető halmaz és X^τ adaptált, vagyis ha $X^\tau(s)$ minden s-re mérhető az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrára nézve, akkor minden s-re

$$\begin{aligned}\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq s\} &= \{X(\tau \wedge s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} = \\ &= \{X^\tau(s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s,\end{aligned}$$

következésképpen az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Elegendő tehát belátni, hogy ha az X progresszíven mérhető, akkor az X^τ szintén progresszíven mérhető. Legyen

$$Y(t,\omega) \circeq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ 0 & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases}.$$

Az Y jobbról reguláris és mivel τ egy megállási idő ezért

$$\{Y(t) = 0\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ebből következően az Y adaptált, így progresszíven mérhető. Ha $\tau(\omega) > 0$, akkor

$$Z(t,\omega) \circeq \int_{(0,t]} X(s,\omega) Y(ds,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ -X(\tau(\omega),\omega) & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases}.$$

Az X progresszíven mérhető, így a Z parametrikus integrál adaptált és nyilván jobbról reguláris, következésképpen progresszíven mérhető. Azonnal látható, hogy

$$X^\tau = XY - Z + X(0)\chi(\tau = 0),$$

következésképpen a X^τ szintén progresszíven mérhető.

$\square$