

1. Példa. Ha w Wiener-folyamat, akkor a folyamat által generált

$$\mathcal{F}_t^0 \doteq \sigma(w(s) : s \leq t)$$

nem feltétlenül jobbról folytonos.

Legyen w Wiener-folyamatot és F legyen az olyan ω kimenetek halmaza, amelyhez van $\varepsilon > 0$, hogy a $[0, \varepsilon]$ szakaszon a $w(\omega)$ trajektória nulla. Világos, hogy $F = \cup_n F_n$, ahol F_n az olyan kimenetek halmaza, ahol a $w(\omega)$ nulla a $[0, 1/n]$ szakaszon. Az F_n halmaz $\mathcal{F}_{1/n}$ -mérhető, hiszen ekvivalens a $w(r_n, \omega) = 0$, $r_n \in [0, 1/n] \cap \mathbb{Q}$ feltétellel. A normális eloszlás folytonossága miatt evidens módon $\mathbf{P}(F_n) = 0$, ezért $\mathbf{P}(F) = 0$. Definíció szerint $w(0) \equiv 0$, ezért $\mathcal{F}_0^0 = \{\Omega, \emptyset\}$, tehát¹ $F \notin \mathcal{F}_0^0$. Ha $t > 0$ és $1/n \leq t$, akkor $F_n \in \mathcal{F}_t^0$, amiből $\cup_{1/n \leq t} F_n \in \mathcal{F}_t^0$. Ugyanakkor $\cup_{1/n \leq t} F_n = F$, ugyanis evidens módon $\cup_{1/n \leq t} F_n \subseteq F$, de ha $\omega \in F$, akkor alkalmasan nagy n -re $\omega \in F_n \subseteq \cup_{1/n \leq t} F_n$. Ebből viszont $F \in \cap_{t>0} \mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{0+}^0$, vagyis $\mathcal{F}_0^0 \neq \mathcal{F}_{0+}^0$. Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az \mathcal{F}_0 σ -algebra teljes, vagyis tetszőleges nullmértékű részhalmazának összes részhalmaza része a σ -algebrának. □

A példa fényében némiképpen meglepő a következő állítás:

2. Állítás. Ha w Wiener-folyamat és

$$\mathcal{F}_t \doteq \sigma(\sigma(w(s) : s \leq t) \cup \mathcal{N}) \doteq \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N})$$

ahol \mathcal{N} az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ alaptér nullmértékű halmazainak halmaza, akkor az \mathcal{F} úgynevezett kiterjesztett filtráció jobbról folytonos. Az állítás nem csak Wiener-folyamatokra, hanem tetszőleges Lévy-folyamat esetén is teljesül.

¹Felmerülhet a kérdés, hogy esetleg $F = \emptyset$. Nem túl nehéz megmutatni, hogy ha $\Omega \doteq C([0, \infty))$ jelöli a $[0, \infty)$ szakaszon értelmezett folytonos függvények összességét és \mathcal{A} a $C([0, \infty))$ szeparábilis metrikus tér Borel-halmazai, akkor van olyan \mathbf{P} valószínűségi mérték az (Ω, \mathcal{A}) mérhető struktúrán, amelyre a $w(t, \omega) \doteq \omega(t)$, $\omega \in \Omega$ koordinátafolyamat Wiener-folyamat. Az így kapott mértéket szokás Wiener-mértéknek mondani. (A pontosság kedvéért a Wiener-folyamatokat a $w(0) \equiv 0$ megkötéssel definiáltuk, ezért a $C([0, \infty))$ helyett csak a $t = 0$ -ban nulla függvényeket kell venni, de ez a gondolatmenetet nem befolyásolja.) Ebben a speciális esetben az $F \neq \emptyset$ evidens módon teljesül.