1. Példa. *Független növekményű folyamatnak lehetnek fix ugrásai.*

Legyen ξ 1/2 valószínűséggel ± 1. Az

$$X(t) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 1 \\ \xi & \text{ha} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

folyamat triviálisan független növekményű. Az X Fourier transzformáltja

$$\varphi(u,t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t < 1 \\ \cos u & \text{ha} \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

A példából látható, hogy a $\varphi(t,u)$ függvény lehet nulla, de a nulla értéket ugrással éri el.

□

Megjegyezzük, hogy mivel minden független növekményű folyamat jobbról reguláris ezért egy független növekményű folyamat pontosan akkor folytonos a sztochasztikus konvergenciában, ha a folyamat bármely időpontban csak nulla valószínűséggel ugorhat. Ha valamely időpontban az ugrás valószínűsége pozitív, akkor azt szokás mondani, hogy a folyamatnak fix ugrása van az adott időpontban.

2. Állítás. *Ha az X független növekményű folyamat sztochasztikus konvergenciában folytonos, akkor az*

$$\varphi_t(u) \doteq \varphi(u,t) \doteq \mathbf{E}\left(\exp\left(iuX(t)\right)\right)$$

soha sem lehet nulla.

Bizonyítás: Rögzítsük az u paramétert. Mivel az X valószínűségben folytonos, ezért a $\varphi(u,t)$ folytonos t-ben. Legyen

$$t_0(u) \doteq \inf\left\{t : \varphi(u,t) = 0\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy $t_0(u) = \infty$. Definíció szerint $X(0) = 0$ így $\varphi(u,0) = 1$ és mivel a $\varphi(u,t)$ a t szerint folytonos nyilvánvalóan $t_0(u) > 0$. Legyen

$$h(u,s,t) \doteq \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(X(t) - X(s)\right)\right)\right).$$

Az X független növekményű, így ha $s < t$, akkor

$$\varphi(u,t) = \varphi(u,s)\, h(u,s,t). \tag{1}$$

Az X jobbról való folytonossága miatt

$$\varphi(u, t_0(u)) = 0.$$

Ha $t_0(u) < \infty$, akkor mivel az X rendelkezik bal oldali határértékkel a $\varphi(u, t_0(u)-)$ határérték értelmes. Megmutatjuk, hogy az értéke nem nulla. Az (1) egyenlőség miatt, ha $s < t_0(u) < \infty$, akkor

$$\varphi(u, t_0(u)-) = \varphi(u,s)\, h(u,s,t_0(u)-).$$

A $t_0(u)$ definíciója miatt $\varphi(u,s) \neq 0$ így ha $\varphi(u, t_0(u)-) = 0$, akkor

$$h(u, s, t_0(u)-) = 0$$

minden $s < t_0(u)$ esetén. Ebből

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} h(u, s, t_0(u)-) = \\ &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} \mathbf{E}(\exp(iuX(t_0(u)-) - iuX(s))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(0)) = 1, \end{aligned}$$

ami lehetelen. Következésképpen

$$0 = \varphi(u, t_0(u)) = \varphi(u, t_0(u)-) \neq 0,$$

ami szintén lehetelen, ugyanis a φ folytonos.

$\square$

3. Állítás (Erős Markov-tulajdonság). *Legyen X független növekményű folyamat és tegyük fel, hogy az X a sztochasztikus konvergenciában folytonos. Jelölje $D([0,\infty))$ a $[0,\infty)$ felett értelmezett jobbról reguláris függvények halmazát. Jelölje $\mathcal{H}$ a pont-funkcionálok által generált σ-algebrát a $D([0,\infty))$ téren. Ha az f nem negatív és $\mathcal{H}$-mérhető funkcionál a $D([0,\infty))$ tér felett, akkor tetszőleges $\tau < \infty$ megállási időre*

$$\mathbf{E}(f(X^*) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(f(X_s^*)) \mid_{s=\tau}$$

ahol

$$X^*(t) \doteq X(\tau + t) - X(\tau)$$

és

$$X_s^*(t) \doteq X(s+t) - X(s).$$

Bizonyítás: Legyen $\varphi(u,t)$ az $X(t)$ Fourier-transzformáltja. Mivel az X a sztochasztikus konvergencia szerint folytonos a $\varphi(u,t) \neq 0$ és értelmes az

$$Z(u,t) \doteq \frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u,t)}$$

exponenciális martingál. Legyen τ korlátos megállási idő. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z(u, \tau + s) \mid \mathcal{F}_\tau) = Z(u, \tau).$$

A $\varphi(u, \tau + t)$ nyilván $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Következésképpen

$$\begin{gathered} \mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) \doteq \\ \doteq \mathbf{E}(\exp(iu(X(\tau+t) - X(\tau))) \mid \mathcal{F}_\tau) = \\ = \frac{\varphi(u, \tau+t)}{\varphi(u,\tau)} = \frac{\varphi(u, s+t)}{\varphi(u,s)} \mid_{s=\tau} = \\ = \frac{\varphi(u,s)\, \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s) - X(s))))}{\varphi(u,s)} \mid_{s=\tau} = \\ = \mathbf{E}(\exp(iu(X_s^*(t)))) \mid_{s=\tau}. \end{gathered} \tag{2}$$

Vagyis az állítás ebben a speciális esetben teljesül. Ha τ nem korlátos, akkor a $\tau_n \overset{\circ}{=} \tau \wedge n$ egy korlátos megállási idő. Legyen

$$h(s) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iu(X(s+t) - X(s)))).$$

Mivel $\tau < \infty$, ezért

$$X(\tau_n + t) - X(\tau_n) \to X(\tau + t) - X(\tau).$$

A majorált konvergencia tétel szerint $h(\tau_n) \to h(\tau)$. Ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n},$$

következésképpen

$$\int_A \chi(\tau \leq n) \exp(iu(X(\tau_n + t) - X(\tau_n))) = \int_A \chi(\tau \leq n) h(\tau_n) d\mathbf{P}.$$

A majorált konvergencia tétele miatt képezhetjük az $n \to \infty$ határértéket. Következésképpen a (2) sorban elhagyhatjuk a τ korlátosságára vonatkozó feltételt. A monoton osztály tétel miatt tetszőleges B Borel-mérhető halmaz esetén

$$\mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi_B(X_s^*(t)))|_{s=\tau}$$

A szokásos módon több-dimenziós trigonometrikus polinómokat használva a monoton osztály tétellel kiterjeszthetjük az állítást minden korlátos $\mathcal{H}$-mérhető függvényre. Végezetül a monoton konvergencia tétellel az állítás átvihető minden $\mathcal{H}$-mérhető nem negatív függvényre.

□

4. Következmény. *Az előző állítás feltételeinek teljesülése esetén*

$$\mathbf{E}(f(X^*) \mid \tau = s) = \mathbf{E}(f(X_s^*)).$$

Bizonyítás: Az előző állítás szerint, felhasználva, hogy a τ megállási idő $\mathcal{F}_\tau$-mérhető

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(X^*) \mid \tau) &\overset{\circ}{=} \mathbf{E}(f(X^*) \mid \sigma(\tau)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(f(X^*) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \sigma(\tau)) = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(f(X_s^*))|_{s=\tau} \mid \sigma(\tau)). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az $s \mapsto \mathbf{E}(f(X_s^*))$ függvény Borel-mérhető. Ezt az

$$s \mapsto \mathbf{E}(\exp(iu(X(s+t) - X(s))))$$

függvények esetén, felhasználva, hogy az X jobbról reguláris, könnyen indokolhatjuk, az általános eset pedig ismételten a monoton osztály tétel közvetlen folyománya. Így az $\mathbf{E}(f(X_s^*))|_{s=\tau}$ összetett függvény $\sigma(\tau)$-mérhető. Következésképpen a külső várható érték elhagyható és éppen a kívánt állítást kapjuk.

□

5. Állítás. *Ha az X független növekményű folyamat és az X valószínűségben folytonos, és az X ugrásai nem nagyobbak egy fix c konstansnál, akkor az X momentumai minden véges időszak alatt egyenletesen korlátosak, vagyis ha $t < \infty$, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\left|X^m(s)\right|\right) \leq k(m,t) < \infty, \quad s \in [0,t].$$

Bizonyítás: Rögzítsük a t időpontot. X jobbról reguláris, így minden trajektóriája minden véges szakaszon korlátos. Ebből következően

$$\sup_{s \leq 2t} |X(s)| < \infty.$$

Így ha b elegendően nagy, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 2t} |X(s)| > \frac{b}{2}\right) < q < 1.$$

Legyen

$$\tau \mathrel{\hat{=}} \inf\{s : |X(s)| > a\} \wedge 2t.$$

A τ definíciója szerint

$$\{\tau < t\} \subseteq \left\{\sup_{s \leq t} |X(s)| > a\right\} \subseteq \{\tau \leq t\}.$$

Ugyanakkor ha valamely ω kimenetelre

$$\omega \in \left\{\sup_{s \leq t} |X(s)| > a\right\} \setminus \{\tau < t\},$$

akkor

$$\sup_{s < t} |X(s,\omega)| \leq a,$$

de

$$X(t) > a,$$

vagyis az X folyamatnak a (t,ω) pontban ugrása van, aminek a sztochasztikus folytonosság miatt a valószínűsége nulla. Mivel az ugrások nagysága korlátos, ezért az X bal oldali határértékének létezése miatt

$$\sup_{s \leq \tau} |X(s)| \leq \sup_{s \leq \tau} |X(s-)| + |\Delta X(\tau)| \leq a + c.$$

Ebből következően

$$\left\{\sup_{s \leq t} |X(s)| > a + b + c\right\} \subseteq \left\{\sup_{s \leq t} |X(s)| > a, \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| > b\right\}$$

ugyanis ha

$$\sup_{s \leq t} |X(s)| > a + b + c$$

akkor nyilván

$$\sup_{s\leq t}|X(s)|>a$$

amiből persze $\tau\leq t$. Ezért ha

$$\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|\leq b$$

lenne, akkor

$$\sup_{s\leq t}|X(s)|\leq\sup_{s\leq\tau}|X(s)|+\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|\leq a+c+b$$

lenne, ami lehetelen. Ugyanakkor mivel

$$b<\sup_{s\leq t}|X(u+s)-X(u)|\leq 2\sup_{s\leq 2t}|X(s)|$$

ezért

$$\left\{\sup_{s\leq t}|X(u+s)-X(u)|>b\right\}\subseteq\left\{\sup_{s\leq 2t}|X(s)|>\frac{b}{2}\right\}$$

Jelölje F a τ eloszlásfüggvényét. Az imént belátott erős Markov-tulajdonság és a regressziós függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a+b+c\right)\leq\\
&\leq\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a,\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|>b\right)=\\
&=\mathbf{P}\left(\tau<t,\sup_{s\leq t}|X(\tau+s)-X(\tau)|>b\right)=\\
&=\int_{[0,t)}\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X((\tau+s))-X(\tau)|>b\mid\tau=u\right)dF(u)=\\
&=\int_{[0,t)}\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(u+s)-X(u)|>b\right)dF(u)\leq\\
&\leq\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq 2t}|X(s)|>\frac{b}{2}\right)\cdot\mathbf{P}(\tau<t)\leq\\
&\leq q\cdot\mathbf{P}(\tau<t)=q\cdot\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>a\right).
\end{aligned}$$

Ebből, ha $a\circeq(n-1)(b+c)$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>n(b+c)\right)\leq q\mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|>(n-1)(b+c)\right)\leq\ldots\leq q^n.$$

Következésképpen minden $s \leq t$ esetén

$$\mathbf{E}\left(|X(s)|^m\right) \leq \mathbf{E}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)|^m\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n(b+c))^m \mathbf{P}\left(\sup_{s\leq t}|X(s)| > (n-1)(b+c)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n(b+c))^m q^{n-1} < \infty.$$

□

6. Állítás. *Minden folytonos független növekményű folyamat Gauss-folyamat, vagyis tetszőleges $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontok esetén az*

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, .X(t_n)) \tag{3}$$

együttes eloszlása normális.

Bizonyítás: Az X független növekményű folyamat, ezért a $Z(t) \triangleq X(t+s) - X(s)$ független növekményű folyamat minden s esetén. Ebből következően elegendő megmutatni, hogy az $X(t)$ normális eloszlású minden t-re ugyanis akkor tetszőleges

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

esetén az $X(t_i) - X(t_{i-1})$ változók normális eloszlással rendelkeznek, ezért a függetlenség miatt az együttes eloszlásuk is normális. Normális eloszlású változók lineáris transzformációja szintén normális eloszlású, következésképpen az (3) együttes eloszlása normális.

Az X folytonossága miatt véges szakaszokon az X összes momentuma korlátos. Ebből következően egyrészt az $\mathbf{E}(X(t))$ minden t esetén véges, másrészt az X a véges időszakaszokon az $L^2(\Omega)$ térben korlátos, így minden véges szakaszon egyenletesen integrálható. Ebből következően a várható érték és a határérték felcserélhető, következésképpen az $\mathbf{E}(X(t))$ folytonos. Ebből következően az

$$Y(t) \triangleq X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

folytonos martingál. Mivel az együttes eloszlás típusát a várható értékekkel való eltolás nem módosítja, ezért feltehetjük, hogy az X folytonos martingál. Az X növekményei függetlenek, ezért az $[X]$ növekményei is függetlenek. Így az $U(t) \triangleq [X](t) - \mathbf{E}([X](t))$ ismételten egy folytonos martingál. Az $[X]$ növekedő így az U véges változású, így majdnem minden kimenetelre $U \equiv 0$. Ebből következően az $[X]$ determinisztikus. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu\int_0^t \exp(iuX(s))\,dX(s) - \\ &\quad -\frac{u^2}{2}\int_0^t \exp(iuX(s))\,d[X(s)]. \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos az X a véges szakaszokon négyzetesen integrálható, így a sztochasztikus integrál martingál. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) - 1 = -\frac{u^2}{2} \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))\, d[X](s)\right). \tag{4}$$

Mivel a kvadratikus variáció determinisztikus, ezért a Fubini-tétel használható. A várható értéket és az integrálást felcserélve

$$\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) - 1 = -\frac{u^2}{2} \cdot \int_0^t \mathbf{E}(\exp(iuX(s)))\, d[X](s).$$

Ha $\varphi(u,t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$, akkor a φ kielégíti az

$$\varphi(u,t) - 1 = -\frac{u^2}{2} \cdot \int_0^t \varphi(u,s)\, d[X](s). \tag{5}$$

integrálegyenletet. Legyen

$$\varphi(u,t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\frac{u^2}{2}[X(t)]\right). \tag{6}$$

Mivel az $[X]$ determinisztikus és véges változású, ezért a (6) sorban definiált φ kielégíti a (5) egyenletet. Ez tulajdonképpen felfogható az Itô-formula elemei következményeként, de felhasználva az $[X]$ folytonosságát egyszerűen és közvetlenül belátható a Newton–Leibnitz formula során követett gondolatmenet segítségével is. Könnyen belátható, hogy a (5) egyenlet megoldása egyértelmű: Ha φ és ψ kielégíti az egyenletet és $\rho \stackrel{\circ}{=} \varphi - \psi$, akkor a ρ függvényre

$$\rho = -\frac{u^2}{2} \cdot \int_0^t \rho d[X] \stackrel{\circ}{=} c \cdot \int_0^t \rho d[X], \quad \rho(0) = 0.$$

Ha valamely t időpontban $\rho(t) \neq 0$, akkor az ilyen időpontok halmazának van véges infimuma. Jelölje ezt az infimumot s.

$$\rho(s) = c\int_0^s \rho d[X] = \int_0^s 0 dv = 0.$$

Ha $s < \infty$, akkor az $[X]$ folytonossága miatt van olyan $t > s$, hogy

$$[X](t) - [X](s) < \frac{1}{2}.$$

Tetszőleges $w \in [s,t]$ időpontra

$$|\rho(w)| = |\rho(w) - \rho(s)| = \left|\int_s^w \rho d[X]\right| \leq$$

$$\leq \sup_{s\leq w\leq t} |\rho(w)|([X](t) - [X](s)) \leq \frac{1}{2} \sup_{s\leq w\leq t} |\rho(w)|.$$

Következésképpen

$$\sup_{s<w\leq t} |\rho(w)| \leq \frac{1}{2} \sup_{s<w\leq t} |\rho(w)|,$$

ami csak akkor lehetséges, ha a ρ nulla az $(s,t]$ szakaszon, ami ellentmond az s definíciójának.

$\square$