1. Állítás. *Ha a* $[0,1]$ *intervallumon értelmezett* X *sztochasztikus folyamat*

1. *stacionárius*[1],
2. *a különböző időpontokhoz tartozó valószínűségi változók függetlenek, és*
3. *minden* t *időpontra* $\mathbf{E}(X(t)) = 0$, *és*
4. *minden* t *időpontra* $\mathbf{D}(X(t)) < \infty$

akkor az $X(t,\omega)$ *kétváltozós függvény nem lehet szorzatmérhető.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X(t)) = 0$, $\mathbf{D}(X(t)) = 1$ és az X mint kétváltozós függvény mérhető. A Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_\Omega |X(t,\omega) X(s,\omega)| \, d\mathbf{P}(\omega) \, dsdt \leq \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{D}(X(t)) \mathbf{D}(X(s)) \, dsdt = 1,$$

ezért a Fubini-tétel felhasználásával, kihasználva a mérhetőségre tett feltételt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\left(\int_0^1 X(t,\omega)\,dt\right)^2\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^1 X(t,\omega)\,dt \int_0^1 X(t,\omega)\,dt\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^1 \int_0^1 X(t,\omega) X(s,\omega)\,dsdt\right) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}(X(t,\omega) X(s,\omega))\,dsdt. \end{aligned}$$

A függetlenség miatt, ha $s \neq t$ akkor

$$\mathbf{E}(X(t) X(s)) = \mathbf{E}(X(t)) \mathbf{E}(X(s)) = 0,$$

ezért az utolsó integrál nulla, tehát az $\int_0^1 X(t,\omega)\,dt$ változó majdnem minden ω-ra nulla. A gondolatmenetet a $[0,1]$ helyett tetszőleges I racionális végpontú intervallumra megismételve megmutatható, hogy létezik olyan N_1 nullmértékű halmaz, hogy ha $\omega \notin N_1$ akkor minden I racionális intervallumra $\int_I X(t,\omega)\,dt = 0$. A Fubini-tétel alapján

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 X^2 d\lambda\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\left(X^2\right) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{D}^2(X)\,d\lambda = 1, \tag{1}$$

ezért egy nullmértékű N_2 halmazon kívül minden ω-ra $\int_0^1 X(t,\omega)^2\,dt < \infty$. Mivel véges mértékű halmazokon a négyzetes integrálhatóságból következik az integrálhatóság, ezért az $X(t,\omega)$ t szerint integrálható, vagyis az integrálfüggvénye folytonos, így ha a racionális végpontú intervallumokon nulla, akkor minden intervallumon is nulla. Ez alapján ha $\omega \notin N_1 \cup N_2$, akkor majdnem minden t-re $X(t,\omega) = 0$, és így $\mathbf{E}\left(\int_0^1 X^2 d\lambda\right) = 0$, de ez ellentmond a (1) sornak.

□

[1] Nem stacionárius növekményű. Vagyis az $X(t)$ eloszlása független a t időponttól.