Vegyük észre, hogy egy mérhető f függvény pontosan akkor integrálható, ha

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\{|f_\alpha| > N\}} |f| \, d\mu = 0.$$

Ez indokolja a következő definíciót.

0.1 Definíció.

Egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N \to \infty} \sup_\alpha \int_{\{|f_\alpha| > N\}} |f_\alpha| \, d\mu = 0.$$

0.1 Példa.

Ha $p > 1$ és az (f_α) család korlátos az $L^p(\mu)$ térben, akkor az az (f_α) család egyenletesen integrálható.

Emlékeztetünk, a következő fontos állításra:

0.2 Tétel.

Valamely az $\mathbb{R}_+$ időtengelyen értelmezett $(X, \mathcal{F})$ martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha van olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$ valószínűségi változó, hogy minden t-re

$$X(t) = \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_s).$$

Vegyük észre, hogy ha az X egyenletesen integrálható martingál, akkor az X a $t = \infty$ helyen értelmezhető, és az $X(\tau)$ megállított változónak akkor is van értelme, ha a τ a végtelen értéket is felveheti.

0.3 Definíció.

Emlékeztetünk, hogy $\mathcal{H}^2$ téren az olyan M martingálok halmazát értjük, amelyekre az

$$t \mapsto \mathbf{E}\left(M^2(t)\right)$$

függvény korlátos. A $\mathcal{H}^2$ tér elemeit négyzetesen integrálható martingáloknak mondjuk[1]*. A négyzetesen integrálható martingálok az egyenletesen integrálható martingálok kiemelkedően fontos alterét alkotják.*

0.4 Tétel. (Megállási opciókról szóló tétel)

Legyen $(X, \mathcal{F})$ martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ tetszőleges megállási idők. Ha az X egyenletesen integrálható, akkor[2]

$$X(\tau_1) = \mathbf{E}(X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

Az egyenlőség értelemszerűen majdnem mindenhol értelemben teljesül. Ha X nem egyenletesen integrálható, de a $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c < \infty$, vagyis ha a megállási idők korlátosak, akkor az egyenlőség érvényben marad[3]*.*

[1] A Wiener-, vagy a Poisson-folyamatok az $\mathbb{R}_+$ időtengelyen nem négyzetesen integrálhatóak. Véges időhorizonton azonban elemei a $\mathcal{H}^2$ térnek. Éppen ezért az említett folyamatok csak lokálisan négyzetesen integrálhatóak. Vagyis nem a $\mathcal{H}^2$, hanem az úgynevezett $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ tér elemei. Éppen ezért szükséges a lokalizációt, illetve a $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ tereket bevezetni.

[2] Vegyük észre, hogy az egyenletes integrálhatóság miatt az $X(\infty)$ változó értelmes, így az $X(\tau)$ kifejezés teljességgel értelmes minden τ megállási idő esetén.

[3] A megállási opciókról szóló tételben a korlátosság feltétele, illetve az egyenletes integrálhatóság feltétele lényegében azonos. Ha a martingál egyenletesen integrálható, akkor értelmezve van a $[0, \infty]$ zárt szakaszon, amely rendezési és topológiai szempontból ekvivalens mondjuk a $[0, 1]$ szakasszal.

0.5 Tétel. (Martingálok és a várható érték megmaradása) *Egy X jobbról reguláris és adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha tetszőleges τ korlátos megállási időre*

$$X(\tau) \in L^1(\Omega)$$

és

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(X(0)).$$

Az egyenlőség pontosan akkor igaz tetszőleges megállási időre, ha az X egyenletesen integrálható martingál.

Bizonyítás: Ha X martingál, illetve egyenletesen integrálható martingál, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt az állítás teljesül. Vegyük az $s < t$ időpontokat és legyen $A \in \mathcal{F}_s$. A megállási idő definíciója alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\tau = t\chi_{A^c} + s\chi_A \tag{1}$$

megállási idő. A feltétel szerint

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(s)\chi_A).$$

De a $\tau \equiv t$ szintén megállási idő, tehát

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(t)\chi_A).$$

A két oldalt összehasonlítva

$$\mathbf{E}(X(s)\chi_A) = \mathbf{E}(X(t)\chi_A),$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s).$$

Felhasználva, hogy az adaptáltság miatt az $X(s)$ változó $\mathcal{F}_s$-mérhető

$$X(s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s).$$

Ha minden megállási idő megengedett, akkor a feltétel szerint az $X(\infty)$ létezik és integrálható, valamint a (1) sorban a $t = \infty$ megengedett, következésképpen az X egyenletesen integrálható.

□

Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy a megállási opciókról szóló tételben a martingál tulajdonság mellett kulcs szerepet játszik a trajektóriák jobbról való regularitása. Ha X egy Poisson-folyamat λ paramérerrel, akkor az $X(t) - \lambda t$ kompenzált Poisson-folyamat martingál. A megállási opciókról szóló tétel miatt ha $\tau < \infty$, akkor a $\tau_n \triangleq \tau \wedge n$ egy korlátos megállási idő és ezért

$$\mathbf{E}(X(\tau_n)) = \lambda \mathbf{E}(\tau_n).$$

A monoton konvergencia tétel miatt[4]

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \lambda \mathbf{E}(\tau).$$

Ha τ az X első ugrásának időpontja és az X-et balról regularizálnánk, akkor $X(\tau) = 0$ lenne, de a másik oldal várható értéke $1/\lambda$ lenne és a

$$0 = \mathbf{E}(X(\tau)) = \lambda \mathbf{E}(\tau) = 1$$

ellentmondást kapnánk.

[4] Vegyük észre, hogy a $\tau < \infty$ feltételre nincsen igazán szükség, ugyanis ha $\tau(\omega) = \infty$, akkor $X(\omega, \tau(\omega)) \triangleq \infty$ az X alkalmas kiterjesztése.

0.6 Tétel. (Martingál megmaradási tétel)
Ha X martingál, és τ tetszőleges megállási idő, akkor az X^{τ} megállított folyamat is martingál.

Bizonyítás: Ha az X reguláris, akkor az X^{τ} megállított folyamat is reguláris. Emlékeztetünk, hogy az X^{τ} megállított folyamat adaptált marad. Ennek megfelelően elegendő ellenőrizni, hogy teljesül az előző tétel. Legyen ϕ tetszőleges korlátos megállási idő. A $\upsilon \doteq \min(\phi, \tau)$ szintén korlátos. Mivel

$$\{\upsilon \leq t\} = \{\phi \leq t\} \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ezért a υ is megállási idő. Az előző tétel szerint

$$\mathbf{E}(X^{\tau}(\phi)) = \mathbf{E}(X(\upsilon)) = \mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X^{\tau}(0)),$$

következésképpen az X^{τ} martingál.

□

A megállási opciókról szóló tétel segítségével a Wiener–folyamattal kapcsolatos számos eloszlás könnyen kiszámolható. Legyen w Wiener-folyamat és jelölje τ_a az a szint első elérésnek időpontját:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \inf\{t : w(t) \geq a\} = \inf\{t : w(t) = a\} = \\ &= \min\{t : w(t) = a\}\end{aligned}$$

0.2 Példa.
Ha $a < 0 < b$, akkor a Wiener–folyamat τ_a és τ_b találati idejére

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{-a}{b-a}.$$

A Wiener–folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel nem korlátosak, tehát majdnem minden az origóból kiinduló trajektória valamelyik oldalon kilép az $[a, b]$ szakaszból, tehát

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = 1.$$

Ha $\tau \doteq \min(\tau_a, \tau_b)$, akkor a w^{τ} korlátos martingál, így alkalmazhatjuk a megállási opciókról szóló tételt. A w^{τ}_{τ} vagy a, vagy b, ennek megfelelően

$$\mathbf{E}(w^{\tau}_{\tau}) = a\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + b\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \mathbf{E}(w^{\tau}(0)) = 0.$$

Két egyenletünk van két ismeretlennel, amit megoldva éppen a keresett összefüggéseket kapjuk.

□

0.3 Példa.
Wiener–folyamat τ_a találati idejének Laplace–transzformáltja

$$L(s) \doteq \mathbf{E}(\exp(-s\tau_a)) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right), \quad s \geq 0.$$

Legyen $a > 0$. Az $X(t) \doteq \exp\left(sw(t) - s^2t/2\right)$ folyamat martingál, ezért az X^{τ_a} is martingál. Ha $s \geq 0$, akkor

$$0 \leq X^{\tau_a}(t) \leq \exp\left(sa - \frac{s^2t}{2}\right) \leq \exp(as),$$

ezért az X^{τ_a} korlátos martingál. Minden korlátos martingál egyenletesen integrálható, így alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel, tehát

$$\mathbf{E}\left(X^{\tau_a}_{\tau_a}\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(sa - \frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right) = \mathbf{E}(X^{\tau_a}(0)) = 1,$$

amiből
$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right)=\exp(-sa).$$
Egyszerű helyettesítéssel, ha $s\geq 0$
$$L(s)\triangleq\mathbf{E}(\exp(-s\tau_a))=\exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$
Ha $a<0$, akkor a $-w$ Wiener–folyamatra megismételve a számolást
$$L(s)=\exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right).$$
□

0.4 Példa.
Mutassuk meg, hogy ha $a\neq 0$, akkor a τ_a sűrűségfüggvénye
$$f(x)\triangleq\frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right),\quad x>0. \tag{2}$$
Megmutatjuk, hogy az $f(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó Laplace-transzformáció éppen
$$L(s)=\exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right),$$
amiből a Laplace-transzformáció egyértelműsége miatt az állítás már nyilvánvaló. Mivel az f-hez tartozó eloszlás a nem negatív számokra koncentrálódik, ezért
$$L(s)\triangleq\int_0^\infty\exp(-sx)f(x)\,dx,\quad s\geq 0.$$
Megjegyezzünk, hogy a (2) F eloszlásfüggvényére érvényes a következő képlet:
$$F(x)\triangleq\int_0^x f(t)\,dt=2\int_a^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)du, \tag{3}$$
ugyanis az első integrálban $t=xa^2/u^2$ helyettesítést végezve
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_\infty^a\frac{au^3}{a^3\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)xa^2(-2)\,u^{-3}du=\\ &= 2\int_a^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)du.\end{aligned}$$
Parciálisan integrálva, és felhasználva, hogy $F(0)=0$, ha $s>0$
$$\begin{aligned}L(s) &= [\exp(-sx)F(x)]_0^\infty+\int_0^\infty s\exp(-sx)F(x)\,dx=\\ &= s\int_0^\infty\exp(-sx)F(x)\,dx.\end{aligned}$$
A (3) összefüggést behelyettesítve
$$L(s)=2s\int_0^\infty\exp(-sx)\int_a^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)dudx.$$
Az $L(s)$ függvényt rögzített s esetén tekinthetjük az a változó függvényének. Jelöljük ez $g(a)$-val. Megmutatjuk, hogy ha $a>0$, akkor a $g(a)$-ra teljesül a
$$g''(a)=2sg(a) \tag{4}$$

differenciálegyenletet. Az integrálban szereplő integrandus nem negatív, tehát Fubini-tétele alapján az integrálás határai felcserélhetőek, vagyis

$$g(a) = 2s \int_a^\infty \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right) dxdu.$$

A belső integrál az u paraméter folytonos függvénye, mivel az

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-sx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) < \infty$$

és ezért az $1/\sqrt{2\pi x} \exp(-sx)$ az integrandus integrálható majoránsa. Ezt felhasználva

$$g'(a) = -2s \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) dx.$$

A második derivált kiszámolásakor „bederiválhatunk" az integrál jel mögé ugyanis a

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right)\right) = \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right)\left(-\frac{2a}{2x}\right)$$

parciális deriváltnak az

$$\exp(-sx) \frac{c}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2x}\right)$$

az $a \in (b, c)$ intervallumon integrálható majoránsa.

$$g''(a) = 2s \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) dx = 2sg(a).$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 2s = 0$, amiből $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2s}$, tehát az általános megoldás

$$A \exp\left(a\sqrt{2s}\right) + B \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

De mivel $L(0) = A + B = 1$, $L(\infty) = 0$, ami alapján

$$L(s) = \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

□