1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *sztochasztikus alaptér kielégíti a szokásos feltételeket, ha*

1. *az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *tér teljes, vagyis ha valamely* $N \in \mathcal{A}$ *halmazra* $\mathbf{P}(N) = 0$, *és* $A \subseteq N$, *akkor ebből következik, hogy az* $A \in \mathcal{A}$ *is teljesül,*
2. *tetszőleges* s*-re az* $\mathcal{F}_s$ *tartalmazza az összes nullmértékű halmazt,*
3. *az* $\mathcal{F}$ *jobbról folytonos, vagyis minden* s*-re* $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s+} \overset{\circ}{=} \cap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{s+\varepsilon}$.

A szokásos feltételek egyik fontos következménye, hogy a logikai martingálok és a martingálok a szokásos feltételek teljesülése esetén módosítás erejéig egybeesnek. Emlékeztetünk, hogy egy X adaptált folyamat logikai martingál, ha $X(t)$ minden t időpontra integrálható és teljesül az

$$\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s)$$

egyenlőség. Egy logikai martingál akkor martingál, ha a trajektóriái jobbról regulárisak. Két folyamat ismételten definíció szerint módosítás erejéig megegyezik, ha minden t időpontra az értékeik ugyanazt a valószínűségi változót határozzák meg. Pontosabban az X és az Y folyamatok módosítás erejéig egybeesnek, ha minden t-re

$$X(t) \overset{m.m.}{=} Y(t).$$

Másképpen fogalmazva, ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor minden logikai martingálhoz van olyan martingál, amely értékei minden t időpontban majdnem mindenhol megegyeznek a logikai martingál értékeivel.

2. Példa. *Ha teljesülnek a szokásos feltételek és* ξ *tetszőleges integrálható valószínűségi változó, akkor van olyan* X *martingál, hogy tetszőleges* t*-re*

$$X(t) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t). \tag{1}$$

Mivel teljesülnek a szokásos feltételek elegendő belátni, hogy az X, pontosabban a

$$t \mapsto \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$$

bármely verziója[1] logikai martingál. Ha tekintjük az (1) sorban definiált X egy tetszőleges verzióját, akkor a torony szabály miatt minden $t > s$ esetén

$$\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s).$$

Vagyis az így kapott változók logikai martingált alkotnak. A szokásos feltételek miatt az idézett tétel alapján a folyamatnak van reguláris verziója, amely már definíció szerint martingált alkot.

□

[1] Emlékeztetünk, hogy egy sztochasztikus folyamat, definíció szerint mindig egy kétváltozós függvény. A feltételes várható érték, szintén definíció szerint, valószínűségi változó, vagyis ekvivalencia osztály. Ennek megfelelően minden $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ ekvivalencia osztályból ki kell venni egy reprezentánst. A kérdés csak az, hogy ez megtehető-e úgy, hogy a kivett értékek jól, vagyis jobbról reguláris módon, kapcsolódjanak. Ehhez szükségesek a szokásos feltételek.

3. Példa. *Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X független növekményű folyamat és minden időpontban létezik várható érték, akkor az*

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

kompenzált folyamat martingál.

A feltételes várható érték elemi tulajdonságai miatt ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(Y(t) - Y(s) + Y(s) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \\ &\stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(Y(s) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} \\ &\stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)) + \mathbf{E}(Y(s) \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbf{E}(Y(s) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{m.m.}{=} Y(s), \end{aligned}$$

ahol természetesen kihasználtuk, hogy az Y adaptált[2]. Ebből következően az Y logikai martingál. Mivel teljesülnek a szokásos feltételek az Y-nak létezik olyan módosítása, amely jobbról reguláris. Definíció szerint minden független növekményű folyamat jobbról reguláris, ezért az $\mathbf{E}(X(t))$ függvény szükségszerűen jobbról reguláris.

□

4. Példa. *Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X egy Lévy-folyamat és az $X(t)$ változónak létezik várható értéke, akkor az*

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} X(t) - t \cdot \mathbf{E}(X(1))$$

folyamat martingál.

Könnyű belátni, hogy minden r racionális számra $\mathbf{E}(X(r)) = r\mathbf{E}(X(1))$. Ebből a jobbról való regularitás miatt minden t-re

$$\mathbf{E}(X(t)) = t\mathbf{E}(X(1)).$$

Vegyük észre, hogy a szokásos feltételek miatt az Y-nak van jobbról reguláris verziója, az X a Lévy-folyamatok definíciója szerint jobbról reguláris, így az $\mathbf{E}(X(t))$ determinisztikus folyamatnak van jobbról reguláris verziója, ami éppen azt jelenti, hogy a $t \mapsto \mathbf{E}(X(t))$ folyamat jobbról reguláris. A példa jelentőségét az adja, hogy hangsúlyozza, hogy a szokásos feltételek teljesülése nélkül a legegyszerűbbnek tűnő állítások igazolása is gondot jelent.

□

5. Példa. *A Wiener-folyamat és a kompenzált Poisson-folyamat martingál.*

[2] Definíció szerint minden független növekményű folyamat adaptált a téren adott filtrációra. Ha a filtráció nem adott, akkor a folyamatot a saját maga által generált filtráció szerint tekintjük, amelyre nyilván adaptált.

Emlékeztetünk, hogy ha X egy Poisson-folyamat, akkor az $X(t)$ minden t-re λt paraméterű Poisson-eloszlású változó. Ebből következően $\mathbf{E}(X(t)) = \lambda t$. Így az $X(t) - \lambda t$ folyamat, amelyet kompenzált Poisson-folyamatnak mondunk, martingál. Vegyük észre, hogy most nem volt szükségünk a jobbról való regularitásra, ugyanis a példa speciális jellege miatt az $\mathbf{E}(X(t)) = t\mathbf{E}(X(1))$ azonosság minden további nélkül teljesült.

$\square$

6. Példa. *Ha X tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az X-hez tartozó exponenciális martingál valóban martingál.*

Tetszőleges t-re definiálhatjuk az

$$\varphi_t(u) \circeq \varphi(u,t) \circeq \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

Fourier-transzformáltakból álló folyamatot. Mivel a Lévy-folyamatok definíció szerint jobbról regulárisak a majorált konvergencia tétele miatt a $\varphi_t(u)$ minden u-ra jobbról reguláris. A független és a stacionárius növekmény feltételét kihasználva

$$\begin{aligned}\varphi_{t+s}(u) &\circeq \mathbf{E}(\exp(iuX(t+s))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s) - X(t)))\exp(iuX(t))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s) - X(t)))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iuX(s))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \circeq \varphi_t(u) \cdot \varphi_s(u),\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\left|\varphi_{t+s}(u)\right| = \left|\varphi_t(u)\right| \cdot \left|\varphi_s(u)\right|.$$

Mivel $|\varphi_t(u)| \leq 1$ és $|\varphi_0(u)| = 1$ a Cauchy-féle függvényegyenletből

$$|\varphi_t(u)| = \exp(t \cdot c(u)).$$

Ebből következően a $\varphi_t(u)$ soha sem lehet nulla. Ha $t > 0$ és $h > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt

$$\begin{aligned}\left|\varphi_t(u) - \varphi_{t-h}(u)\right| &= \left|\varphi_{t-h}(u)\right| \left|1 - \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-h}(u)}\right| \leq \\ &\leq \left|1 - \varphi_h(u)\right| \to 0.\end{aligned}$$

Következésképpen a $\varphi_t(u)$ balról is folytonos. Tehát a $\varphi_t(u)$ minden u-ra a t.időváltozóban folytonos. Ennek érdekes következménye, hogy

$$\mathbf{E}(iu(X(t) - X(t-))) = \frac{\varphi_t(u)}{\lim_{h\searrow 0}\varphi_{t-h}(u)} = \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-}(u)} = 1.$$

A Fourier-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást, következésképpen $X(t-) \overset{a.s.}{=} X(t)$. Másképpen fogalmazva Lévy-folyamatok esetén tetszőleges

t-re az ugrás valószínűsége nulla. Definíció szerint egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálja

$$Z(t,u,\omega) \circeq \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi_t(u)}.$$

A Z valóban martingál: ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_t(u) \mid \mathcal{F}_s) &\circeq \mathbf{E}\left(\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi_t(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu(X(t)-X(s)))\exp(iuX(s))}{\varphi_{t-s}(u)\varphi_s(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \frac{\exp(iuX(s))}{\varphi_s(u)}\frac{\mathbf{E}(\exp(iu(X(t)-X(s))))}{\varphi_{t-s}(u)} = \\
&= Z_s(u)\frac{\mathbf{E}(\exp(iuX(t-s)))}{\varphi_{t-s}(u)} = \\
&= Z_s(u)\cdot 1 \circeq Z_s(u).
\end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenet igaz ha a $\varphi_t(u)$ Fourier-transzformált helyett az

$$L(t,s) = \mathbf{E}(\exp(-sX(t))), \quad s > 0$$

Laplace-transzformálttal osztunk, feltéve persze, hogy az X nem negatív.

$\square$

7. Példa. *Wiener-folyamat exponenciális martingálja.*

Ha w Wiener-folyamat, akkor a $w(t)$ eloszlása, $N\left(0,\sqrt{t}\right)$. Ebből

$$\begin{aligned}
\varphi_t(u) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(iN\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(i\sqrt{t}N(0,1)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\left(u\sqrt{t}\right)^2}{2}\right) = \exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Így

$$Z(t,u) = \frac{\exp(iuw(t))}{\exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right)} = \exp\left(iuw(t) + t\frac{u^2}{2}\right).$$

Ha a Fourier-transzformált helyett a Laplace-transzformáltat vesszük, akkor a

$$Z(t,s) = \frac{\exp(-sw(t))}{\exp\left(t\frac{s^2}{2}\right)} = \exp\left(-sw(t) - t\frac{s^2}{2}\right)$$

martingál[3]. Mivel a Wiener-folyamat szimmetrikus exponenciális martingálon szokás a

$$\exp\left(sw(t) - t\frac{s^2}{2}\right)$$

[3]Vegyük észre, hogy a Laplace-transzformált a normális eloszlás esetén jól definiált minden s-re.

kifejezést is érteni[4].

$\square$

[4]Emlékeztetünk, hogy definíció szerint egy ξ valószínűségi változó momentumgeneráló függvényén az $s \mapsto \mathbf{E}(\exp(s\xi))$, Laplace-transzformáltján az $s \mapsto \mathbf{E}(\exp(-s\xi))$ függvényt szokás érteni.