1. Állítás (Erős Markov-tulajdonság Lévy-folyamatokra). *Legyen $\tau < \infty$ egy megállási idő és legyen X egy tetszőleges Lévy-folyamat. Ha*

$$X^*(t,\omega) \circeq X(\tau(\omega)+t,\omega) - X(\tau(\omega),\omega), \quad t \geq 0,$$

akkor

1. *X^* szintén Lévy-folyamat az $\mathcal{F}_t^* \circeq \mathcal{F}_{\tau+t}$ filtrációra nézve,*
2. *az X és az X^* eloszlása azonos,*
3. *speciálisan az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ halmaz független az $\mathcal{F}_0^* \circeq \mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától.*

Bizonyítás: Mivel az X jobbról reguláris, ezért az X progresszíven mérhető, így az X^* valóban $\mathcal{F}_t^*$-adaptált.

1. Tetszőleges u-ra az X exponenciális martingálja martingál, így a megállási opciókról szóló tétel szerint minden korlátos τ megállási időre

$$\mathbf{E}(Z(\tau+t) \mid \mathcal{F}_\tau) = Z(\tau).$$

A $Z(\tau)$ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető és mivel $Z \neq 0$ és mivel τ korlátos, ezért a $Z(\tau)^{-1}$ is korlátos, így a kiemelési szabály szerint

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = 1. \tag{1}$$

A Lévy-folyamatok Fourier-transzformáltjára teljesülő

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \varphi_s$$

csoport szabályt alkalmazva minden ω kimenetelre

$$\frac{\varphi_{\tau(\omega)}(u)}{\varphi_{\tau(\omega)+t}(u)} = \frac{\varphi_{\tau(\omega)}(u)}{\varphi_{\tau(\omega)}(u)\,\varphi_t(u)} = \frac{1}{\varphi_t(u)}.$$

Ebből következően tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén a (1) felhasználásával

$$\begin{aligned}
\varphi_t(u)\,\mathbf{P}(A) &= \varphi_t(u)\int_A 1 d\mathbf{P} = \varphi_t(u)\int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} d\mathbf{P} = \qquad (2)\\
&= \varphi_t(u)\int_A \frac{\exp(iu(X(\tau+t)-X(\tau)))}{\varphi_t(u)} d\mathbf{P} = \\
&= \int_A \exp(iuX^*(t))\, d\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Ha most τ tetszőleges véges megállási idő és $\tau_n \circeq n \wedge \tau$ akkor a $\tau < \infty$ felhasználásával

$$X(\tau_n+t) - X(\tau_n) \to X(\tau+t) - X(\tau) \circeq X^*(t). \tag{3}$$

Ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor minden $t \geq 0$ esetén

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \tag{4}$$

ugyanis ha $t \leq n$, akkor

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq t\} \subseteq \{\tau \leq n\},$$

ha pedig $t > n$, akkor

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq n\}.$$

A (4) és a megállított σ-algebra definíciójának felhasználásával

$$A_n \mathrel{\hat{=}} A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}. \tag{5}$$

Mivel a τ_n korlátos az (2) szerint

$$\int_{A_n} \exp\left(iu\left(X(\tau_n + t) - X(\tau_n)\right)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(A_n\right) \varphi_t\left(u\right).$$

Az (3) és a majorált konvergencia tétel szerint

$$\int_A \exp\left(iuX^*(t)\right) d\mathbf{P} =$$

$$= \int_A \lim_{n\to\infty} \chi\left(\tau \leq n\right) \exp\left(iu\left(X\left(\tau_n + t\right) - X\left(\tau_n\right)\right)\right) d\mathbf{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A \chi\left(\tau \leq n\right) \exp en\left(iu\left(X\left(\tau_n + t\right) - X\left(\tau_n\right)\right)\right) d\mathbf{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \exp\left(iu\left(X\left(\tau_n + t\right) - X\left(\tau_n\right)\right)\right) d\mathbf{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right) \varphi_t\left(u\right) = \mathbf{P}\left(A\right) \varphi_t\left(u\right) = \mathbf{P}\left(A\right) \int_\Omega \exp\left(iuX(t)\right) d\mathbf{P}.$$

2. Ha $A \mathrel{\hat{=}} \Omega$, akkor az egyenlet szerint az $X^*(t)$ Fourier-transzformáltja éppen φ_t. Következésképpen a Fourier transzformációkra vonstkozó unicitási tétel szerint az $X^*(t)$ és az $X(t)$ eloszlása megegyezik. Legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos f függvények halmaza, amelyekre minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén

$$\int_A f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(A\right) \int_\Omega f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P}.$$

Az $\mathcal{L}$ nyilvánvalóan λ-rendszer, és az $\mathcal{L}$ tartalmazza az

$$x \mapsto \exp\left(iux\right), \quad u \in \mathbb{R}$$

trigonometrikus polinomok π-rendszerét. A monoton osztály tétel miatt az $\mathcal{L}$ tartalmazza az $f \mathrel{\hat{=}} \chi_B$ ahol $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ függvényeket. Következésképpen minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\int_A \chi_B\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(A \cap \{X^*(t) \in B\}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(A\right) \int_\Omega \chi_B\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(A\right) \cdot \mathbf{P}\left(X^*(t) \in B\right).$$

Következésképpen az $X^*(t)$ független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától.

3. Be kell látni, hogy az X^* független és stacionárius növekményű..Ha $\sigma \triangleq \tau + t$ és

$$X^{**}(h) \triangleq X(\sigma + h) - X(\sigma),$$

akkor a tétel már belátott részét a σmegállási időre használva

$$\begin{aligned} X^*(t+h) - X^*(t) &\triangleq (X(\tau+t+h) - X(\tau)) - (X(\tau+t) - X(\tau)) = \\ &= X(\tau+t+h) - X(\tau+t) \triangleq \\ &\triangleq X(\sigma+h) - X(\sigma) \triangleq X^{**}(h) \cong X(h), \end{aligned}$$

amely független a t-től és így az X^* növekményei stacionáriusak. Ugyancsak a tétel már belátott részét használva

$$X^*(t+h) - X^*(t) = X^{**}(h)$$

független az $\mathcal{F}_\sigma \triangleq \mathcal{F}_t^*$ σ-algebrától. Nyilvánvalóan $X^*(0) = 0$ és az X^* jobbról reguláris, így az X^* független növekményű folyamat az $\mathcal{F}^*$ filtrációra nézve..

4. Belátjuk, hogy az X és az X^* eloszlása azonos. Emlékeztetünk, hogy két folyamat eloszlása azonos, ha az értékeikből álló valószínűségi változók halmazának eloszlása azonos. Legyen

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

tetszőleges. Miként láttuk

$$\begin{aligned} X^*(t_k) - X^*(t_{k-1}) &\cong X^*(t_k - t_{k-1}) \cong X(t_k - t_{k-1}) \cong \\ &\cong X(t_k) - X(t_k - 1). \end{aligned}$$

Mivel a növekmények függetlenek, ezért a növekmények közös eloszlása éppen az eloszlások szorzata, így az $(X^*(t_k) - X^*(t_{k-1}))_{k=1}^n$ és az $(X(t_k) - X(t_{k-1}))_{k=1}^n$ eloszlása szintén azonos. Azonos eloszlású változók lineáris leképezésének eloszlása azonos. Ebből következően az $(X(t_k))_{k=1}^n$ és az $(X^*(t_k))_{k=1}^n$ eloszlása is azonos. Ismételten alkalmazva a monoton osztály tételt belátható, hogy az X^* és az X eloszlása azonos.

5. Mivel az X^* független növekményű folyamat, ezért az $\mathcal{F}_t^*$ független az

$$X^*(u) - X^*(v), \quad u \geq v \geq t$$

növekmények által generált $\mathcal{G}_t^*$ σ-algebrától. Így speciálisan az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ független az $\mathcal{F}_0^* = \mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától.

□

Az erős Markov-tulajdonságnak három fontos alkalmazása van:

Az első segítségével a Poisson eloszlás ugrásainak eloszlását határozhatjuk meg. Vegyük észre, hogy ha τ_1 jelöli az X Poisson-folyamat első ugrásának helyét, akkor

$$\tau_1 = \inf\{t : N(t) = 1\}.$$

Könnyen látható, hogy τ_1 eloszlása csak az N folyamat eloszlásától függ:

$$\{\tau_1 \le t\} = \{N(t) \ge 1\}$$

Mivel az N és az

$$N^*(t) \circeq N(\tau_1 + t) - N(\tau_1)$$

eloszlása azonos, ezért a második és az első ugrás között eltelt idő eloszlása megegyezik a τ_1 eloszlásával. Vagyis, ha σ_n jelöli az N Poisson-folyamat n-edik ugrásának időpontját, akkor

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k,$$

ahol a τ_k független, azonos eloszlású exponenciális eloszlású változók.

Az erős Markov tulajdonság második fontos következménye, hogy az ugrások nem előrejelezhetőek. Emlékeztetünk, hogy egy $\tau > 0$ megállási időt előrejelezhetőnek mondunk, ha létezik megállási idők egy (ρ_n) sorozata, amelyre $\rho_n < \tau$ és $\rho_n \nearrow \tau$. Ha például a τ_1 előrejlezhető lenne, akkor az

$$N_n^*(t) \circeq N(\rho_n + t) - N(\rho_n)$$

folyamatok mindegyike Poisson-folyamat lenne, és az eloszlásuk megegyezne az N eloszlásával. Az N_n^* első ugrása éppen a $\tau_1 - \rho_n$ időpontban következik be. De a τ_1-nek létezik várható értéke amely az exponenciális eloszlás várható értéke alapján éppen $1/\lambda$. Így a majorált konvergencia tétel miatt

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\tau_1 - \rho_n) = \mathbf{E}\left(\tau_1 - \lim_{n\to\infty} \rho_n\right) = 0,$$

ami lehetetlen, így a τ_1 nem előrejelezhető.

Az erős Markov tulajdonság harmadik alkalmazása valamivel nehezebb. Az alábbi állítás legfontosabb következménye, hogy a folytonos Lévy folyamatoknak létezik az összes momentuma, és a momentumok értéke minden véges időtartományon korlátos.

2. Állítás. *Ha egy X Lévy-folyamat ugrásainak nagysága abszolút értékben egy $c \ge 0$ korlát alatt marad, akkor tetszőleges véges $[0, u]$ szakaszon az X összes abszolút momentuma egyenletesen korlátos, vagyis tetszőleges m-re létezik olyan $k(m)$, hogy*

$$\mathbf{E}(|X^m(t)|) \le k(m), \quad t \in [0, u].$$

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy majdnem minden kimenetelre a

$$\tau_1 \circeq \inf\{t : |X(t)| > c\}$$

megállási idő véges, ugyanis az olyan ω kimeneteleket, amelyekre a $\tau_1(\omega)$ végtelen a momentumok végessége szempontjából elhagyhatjuk, ugyanis az ilyen kimenetelekre az $X(t, \omega)$ egyenletesen korlátos. Ezt követően tekintsük a

$$\tau_2 \circeq \inf\{t : |X^*(t)| > c\} + \tau_1 \circeq \inf\{t : |X(t + \tau_1) - X(\tau_1)| > c\} + \tau_1$$

megállási időt, majd analóg módon képezzük a τ_3 megállási időt, stb. Az erős Markov-tulajdonság miatt az $\{X^* (t) : t \geq 0\}$ változók függetlenek az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ σ-algebrától. A

$$\tau_2 - \tau_1 \stackrel{\circ}{=} \inf \{t \geq 0 : |X^* (t)| > c\}$$

mérhető az $\{X^* (t) : t \geq 0\}$ változók által generált σ-algebrára nézve, így a $\tau_2 - \tau_1$ független az $\mathcal{F}_{\tau_1}$-től, illetve általában a $\tau_n - \tau_{n-1}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$ σ-algebrától, és az eloszlása megegyezik a τ_1 eloszlásával, ami alapján

$$\mathbf{E} (\exp (-\tau_n)) = (\mathbf{E} (\exp (-\tau_1)))^n \stackrel{\circ}{=} q^n,$$

ahol $0 \leq q < 1$, ugyanis ha $q = 1$, akkor majdnem minden kimenetelre $\tau_1 = 0$, amiből a jobbról való folytonosság miatt $|X (0)| \geq c$, ami ellentmond a Lévy-folyamat definíciójának. Mivel az ugrások maximális nagysága c, ezért evidens módon

$$|X (\tau_1)| \leq |X (\tau_1 - 0)| + c \leq 2c,$$

illetve általában

$$\sup_t |X^{\tau_n} (t)| \leq 2nc.$$

A Markov-egyenlőtlenségből

$$\begin{gathered} \mathbf{P} (|X (t)| > 2nc) \leq \mathbf{P} (\tau_n < t) = \\ = \mathbf{P} (\exp (-\tau_n) > \exp (-t)) \leq \frac{\mathbf{E} (\exp (-\tau_n))}{\exp (-t)} = \exp (t)\, q^n, \end{gathered}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (|X^m (t)|) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [2 (n+1) c]^m \cdot \mathbf{P} (|\xi (t)| > 2nc) \leq \\ &\leq \exp (t) \sum_{n=0}^{\infty} [2 (n+1) c]^m q^n \leq \exp (t)\, L (m), \end{aligned}$$

amiből az abszolút momentumok véges szakaszokon való egyenletes korlátossága már evidens.

□