1. Példa. *A gamma függvény és a Fubini-tétel.*

1. Az $x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)$ függvény az $x,t\geq 0$ tartományon folytonos, és nem negatív, ezért alkalmazható rá a Fubini-tétel.

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)dxdt = \int_0^\infty\left[\frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{-2\left(1+t^2\right)}\right]_0^\infty dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $u=xt$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)dtdx = \\ &= \int_0^\infty x\exp\left(-x^2\right)\int_0^\infty\exp\left(-\left(xt\right)^2\right)dtdx = \\ &= \int_0^\infty x\exp\left(-x^2\right)\int_0^\infty\exp\left(-u^2\right)\frac{du}{x}dx = \left(\int_0^\infty\exp\left(-x^2\right)dx\right)^2, \end{aligned}$$

vagyis

$$\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}. \qquad (1)$$

Ebből elemi számolással $u=x^2$ helyettesítéssel

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty\exp\left(-x^2\right)dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Tekintsük a gamma és a béta függvények közötti

$$B\left(x,y\right) = \frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$$

nevezetes kapcsolatot. A gamma függvény mellett vezessük be a

$$\Gamma\left(x,\lambda\right) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty t^{x-1}\exp\left(-\lambda t\right)dt, \quad x,\lambda>0.$$

függvényt. Egyszerű $u=t\lambda$ helyettesítéssel

$$\Gamma\left(x,\lambda\right) = \int_0^\infty\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1}\exp\left(-u\right)\frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma\left(x\right)}{\lambda^x}.$$

Ebből $s = t/(1-t)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
I &\doteq \int_0^\infty \Gamma(x+y, 1+s)\, s^{x-1} ds = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^\infty (1+s)^{-(x+y)} s^{x-1} ds = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^1 \left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \doteq \\
&\doteq \Gamma(x+y) B(x,y).
\end{aligned}$$

Az integrandus folytonos és nem negatív, ezért alább a két integrál felcserélhető:

$$\begin{aligned}
I &\doteq \int_0^\infty \Gamma(x+y, 1+s)\, s^{x-1} ds \doteq \\
&\doteq \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-t(1+s))\, t^{x+y-1} s^{x-1} dt ds = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-t(1+s))\, t^{x+y-1} s^{x-1} ds dt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp(-t) \int_0^\infty \exp(-ts)\, s^{x-1} ds dt \doteq \\
&\doteq \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp(-t)\, \Gamma(x,t)\, dt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp(-t) \frac{\Gamma(x)}{t^x} dt \doteq \\
&\doteq \Gamma(x) \int_0^\infty t^{y-1} \exp(-t)\, dt = \Gamma(x)\Gamma(y),
\end{aligned}$$

amiből

$$\Gamma(x+y) B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

□

2. Példa. *A χ_n^2 eloszlás sűrűségfüggvénye.*

Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és határozzuk meg az $\eta \doteq \xi^2$ eloszlását! Ha $x \leq 0$, akkor $F_\eta(x) = \mathbf{P}(\xi^2 < x) = 0$. Ha $x > 0$ akkor

$$\begin{aligned}
F_\eta(x) &= \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.
\end{aligned}$$

Deriválással, ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Az n szabadságfokú χ_n^2 változót mint n darab független, standard normális eloszlású változó négyzetének összegét definiáljuk..Ha $n = 1$, akkor, miként már láttuk, a $\chi_1^2 \cong N(0,1)^2$ sűrűségfüggvénye

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

Az indukciós sejtés szerint

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

Az összeg eloszlására vonatkozó konvolúciós képlet szerint

$$k_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} k_1(x-y) k_n(y)\, dy = \int_0^\infty k_1(x-y) k_n(y)\, dy,$$

hiszen ha $y \leq 0$, akkor $k_n(y) = 0$. Ha $x \leq 0$, $y \geq 0$, akkor $x - y \leq 0$, amiből $k_1(x-y) = 0$, vagyis ha $x \leq 0$, akkor $k_{n+1}(x) = 0$. Ha $x > 0$, akkor a $k_1(x-y) k_n(y)$ a $[0,x]$ intervallumon kívül nulla, vagyis

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \int_0^x k_1(x-y) k_n(y)\, dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x \frac{y^{n/2-1}}{\sqrt{x-y}} dy. \end{aligned}$$

A $t = y/x$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^1 \frac{x^{n/2-1}t^{n/2-1}}{\sqrt{x-tx}} x dt = \\ &= \frac{x^{n/2-1}\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ahol $B(x,y)$ a béta függvény. A béta és a gamma függvény közötti azonosságot valamint a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ összefüggést felhasználva

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x) &= \frac{x^{(n+1)/2-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} = \\ &= \frac{x^{(n+1)/2-1}}{\sqrt{2}} \frac{\exp(-x/2)}{2^{n/2}\Gamma((n+1)/2)} = \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)} x^{(n+1)/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

$\square$

3. Példa. *Független valószínűségi változók hányadosának sűrűségfüggvénye.*

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, és legyen f az együttes sűrűségfüggvényük. Határozzuk meg a

$$\zeta \mathrel{\mathring{=}} \frac{\xi}{\eta}$$

változó sűrűségfüggvényét! Megjegyezzük, hogy mivel feltételeztük, hogy a (ξ,η) párnak létezik f sűrűségfüggvénye, ezért

$$\mathbf{P}(\eta=0)=\mathbf{P}((\xi,\eta)\in\mathbb{R}\times\{0\})=\int_{\mathbb{R}\times\{0\}} f d\lambda_2 = 0,$$

vagyis, bár a hányados, mint valószínűségi változó nem feltétlenül minden kimenetelre értelmes, de egy nullmértékű halmaztól eltekintve értelmes, vagyis valószínűségi változó, amelynek az eloszlása egyértelműen meghatározott. Legyen h a ζ sűrűségfüggvénye, és H jelölje az eloszlásfüggvényt. Ha G jelöli az η eloszlásfüggvényét és g a sűrűségfüggvényét, akkor a függetlenség miatt alább behelyettesíthetjük a feltételt

$$\begin{aligned}
H(z) &\mathrel{\mathring{=}} \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<z\right)=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<z \mid \eta=y\right)dG(y)= \\
&= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y}<z\right)dG(y)=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y}<z\right)g(y)\,dy= \\
&= \int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y}<z\right)g(y)\,dy+\int_{0}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y}<z\right)g(y)\,dy= \\
&= \int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}(\xi>yz)\,g(y)\,dy+\int_{0}^{\infty}\mathbf{P}(\xi<yz)\,g(y)\,dy= \\
&= \int_{-\infty}^{0}1-\mathbf{P}(\xi\le yz)\,g(y)\,dy+\int_{0}^{\infty}\mathbf{P}(\xi<yz)\,g(y)\,dy.
\end{aligned}$$

A majorált konvergencia tétel miatt az integrálok alatt deriválhatunk[1]. Ha f

---

[1]Emlékeztetünk, hogy egy

$$\int_X f(a,x)\,d\mu(x)$$

paraméteres integrálba akkor lehet a paraméer szerint bederiválni, ha az integrandust a paraméter szerint lederiválva a kapott

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(a,x)$$

kétváltozós függvénynek van az integrálandó változó szerint integrálható $g(x)$ majoránsa amely a paraméter szerint egyenletesen majorálja a lederivált kétváltozós függvényt, vagyis

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(a,x)\right| \le g(x)\in L^1(\mu).$$

jelöli a ξ sűrűségfüggvényét, akkor

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_{-\infty}^{0} -f(yz)\, yg(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} f(yz)\, yg(y)\, dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(yz)\, g(y)\, |y|\, dy. \end{aligned}$$

$\square$

4. Definíció. *Ha α és β pozitív számok, akkor az*

1.

$$f(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (α, β) paraméterű béta eloszlásnak hívjuk és $B(a, \beta)$ módon jelöljük, a

2.

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást általánosított, vagy másodfajú béta eloszlásnak nevezzük. A másodfajú béta eloszlást $\widetilde{B}(\alpha, \beta)$-val fogjuk jelölni.

5. Állítás. *Ha a ξ béta eloszlású, akkor az*

$$\eta \stackrel{\circ}{=} \frac{\xi}{1-\xi}$$

másodfajú béta eloszlású. Ha η másodfajú béta eloszlású, akkor a

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \frac{\eta}{1+\eta}$$

béta eloszlású.

Bizonyítás: Ha $\varphi(u) \stackrel{\circ}{=} u/(1-u)$, akkor $\varphi^{-1}(x) = x/(1+x)$, és a sűrűségfüggvények transzformációs szabálya szerint

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{\beta-1} \frac{1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{a-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

A fordított irány igazolása analóg.

$\square$

6. Példa. *Két független χ^2 eloszlás hányadosa másodfajú béta eloszlás.*

Ha $x, y > 0$, akkor a hányados sűrűségfüggvényének képlete alapján

$$\frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y\,(xy)^{m/2-1}\exp\left(-\frac{xy}{2}\right)y^{n/2-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{x^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty y^{(m+n)/2-1}\exp\left(-\frac{y}{2}(1+x)\right)dy.$$

Az integrandust ismételten a Γ függvényre akarjuk visszavinni, ezért

$$t = \frac{y}{2}(1+x)$$

helyettesítést végzünk.

$$\frac{x^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^\infty \left(\frac{2t}{1+x}\right)^{(m+n)/2-1}\frac{2\exp(-t)}{1+x}dt =$$

$$= \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\frac{x^{m/2-1}}{(1+x)^{(m+n)/2}}.$$

7. Definíció. *Ha λ és a pozitív számok, akkor az*

$$f(x) \mathrel{\hat=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (a, λ) paraméterű gamma eloszlásnak hívjuk és $\Gamma(a, \lambda)$ módon jelöljük.

A Γ eloszlás jelentőségét az adja, hogy egyrészt az exponenciális eloszlás általánosítása, $\Gamma(1, \lambda)$ éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás, másrészt szorosan kötődik a normális eloszlás négyzetének eloszlásához.

8. Állítás. *A χ_n^2 és a $\Gamma(n/2, 1/2)$ eloszlások megegyeznek.*

9. Állítás. *Ha $(\tau_k)_{k=1}^n$ független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változók, akkor a*

$$\sigma_n \mathrel{\hat=} \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n \tag{2}$$

eloszlása $\Gamma(n, \lambda)$, általánosabban ha a τ_i független változók eloszlása $\Gamma(a_i, \lambda)$, akkor a (2) összeg eloszlása $\Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i, \lambda\right)$.

Bizonyítás: A $\Gamma(1, \lambda)$ sűrűségfüggvénye

$$\frac{\lambda^1}{\Gamma(1)}x^{1-1}\exp(-\lambda x) = \lambda\exp(-\lambda x), \quad x > 0,$$

éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Az állítást elegendő két változóra belátni, az általános eset ebből indukcióval következik.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(x-t)^{a-1}\exp(-\lambda(x-t))\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}t^{b-1}\exp(-\lambda t)\,dt = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^x (x-t)^{a-1}t^{b-1}dt = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^1 (x-xz)^{a-1}(xz)^{b-1}xdz = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\,x^{a+b-1}\int_0^1 (1-z)^{a-1}z^{b-1}dz = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}\exp(-\lambda x)\,x^{a+b-1},
\end{aligned}
$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a gamma és a béta függvények közötti nevezetes azonosságot.

□

10. Állítás. *Két független Γ eloszlás hányadosa másodfajú béta eloszlású, vagyis ha $\xi \cong \Gamma(a,\lambda)$ és $\eta \cong \Gamma(b,\lambda)$ valamint a ξ és az η függetlenek, akkor*

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \widetilde{B}(a,b).$$

Bizonyítás: A hányados valószínűségi változó sűrűségfüggvényének képletét felírva, és kihasználva a két változó nem negativitását, ha $u > 0$, akkor

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(uy)^{a-1}\exp(-\lambda uy)\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}\exp(-\lambda y)\,ydy = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}\exp(-\lambda y(u+1))\,dy = \\
= \quad & \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda(1+u)}\right)^{a+b-1}\exp(-t)\frac{1}{\lambda(1+u)}dt = \\
= \quad & \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\frac{1}{(1+u)^{a+b}}\int_0^\infty t^{a+b-1}\exp(-t)\,dt = \\
= \quad & \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\frac{1}{(1+u)^{a+b}},
\end{aligned}
$$

ami éppen a $\widetilde{B}(a,b)$.

□

11. Példa. *Az exponenciális és a Poisson-eloszlás kapcsolata.*

Legyen $0 \leq t < \infty$, és $(\tau_n)_n$ független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változók. A $(\tau_n)_n$ változók tekinthetők egymást követő események időpontjainak. Legyen $\xi(t)$ a $[0,t]$ időszak alatt bekövetkezett események száma. Határozzuk meg a $\xi(t)$ eloszlását. Vezessük be a $\sigma_n \doteq \sum_{k=1}^{n} \tau_k$ változót. Az előző példa alapján a σ_{n+1} eloszlása $\Gamma(n+1,\lambda)$. Parciálisan integrálva, illetve felhasználva, hogy $\Gamma(n+1) = n!$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi(t) < n+1) &= \mathbf{P}(\sigma_{n+1} > t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n \exp(-\lambda x)\, dx = \\
&= \left[\frac{\lambda^{n+1} x^n}{\Gamma(n+1)} \frac{\exp(-\lambda x)}{-\lambda} \right]_t^{\infty} + \int_t^{\infty} n \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n+1)} \exp(-\lambda x)\, dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) + \mathbf{P}(\xi(t) < n).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{P}(\xi(t) = n) = \mathbf{P}(\xi(t) < n+1) - \mathbf{P}(\xi(t) < n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t),$$

tehát a $\xi(t)$ λt paraméterű Poisson-eloszlást alkot.

□

12. Állítás. *Ha $\xi \cong \Gamma(a,\lambda)$ és $\eta \cong \Gamma(b,\lambda)$ valamint a ξ és az η függetlenek, akkor*

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \widetilde{B}(a,b), \quad \frac{\xi}{\xi+\eta} \cong B(a,b). \tag{3}$$

Bizonyítás: A hányados valószínűségi változó sűrűségfüggvényének képletét felírva, és kihasználva a két változó nem negativitását, ha $u > 0$, akkor

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (uy)^{a-1} \exp(-\lambda u y) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} \exp(-\lambda y)\, y dy = \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^{\infty} y^{a+b-1} \exp(-\lambda y (u+1))\, dy = \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda(1+u)} \right)^{a+b-1} \exp(-t) \frac{1}{\lambda(1+u)} dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}} \int_0^{\infty} t^{a+b-1} \exp(-t)\, dt = \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}},
\end{aligned}$$

ami éppen a $\widetilde{B}(a,b)$. A második állítás igazolása a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}<x\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi/\eta}{1+\xi/\eta}<x\right)=\\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<x\left(1+\frac{\xi}{\eta}\right)\right)=\\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<\frac{x}{1-x}\right),\end{aligned}$$

így deriválással az imént belátottak alapján a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}\frac{1}{(1+x/(1-x))^{a+b}}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ez elemi számolással

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}(1-x)^{a+b}\frac{1}{(1-x)^2},$$

ami pedig

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},$$

ami éppen a $B(a,b)$ sűrűségfüggvénye.

□

13. Példa. *Exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege és az egyenletes eloszlásból származó rendezett minta kapcsolata.*

Legyenek $(\xi_k)_{k=1}^n$ független azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\sigma_m \circeq \sum_{k=1}^m \xi_k$. Határozzuk meg az $\eta_k \circeq \sigma_k/\sigma_n$ változók eloszlását.

$$\mathbf{P}(\eta_1<x)=\mathbf{P}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1+\ldots+\xi_n}<x\right).$$

A ξ_1 eloszlása $\Gamma(1,\lambda)$, a $\sum_{k=2}^n \xi_k$ eloszlása $\Gamma(n-1,\lambda)$. Ebből a (3) miatt az η_1 eloszlása $B(1,n-1)$. A $B(1,n-1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) \circeq \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)}x^{1-1}(1-x)^{n-2}, \quad x\in(0,1).$$

A $\Gamma(n)=(n-1)!$ értéket beírva

$$f_1(x)=(n-1)(1-x)^{n-2} \quad x\in(0,1).$$

Legyenek $(\tau_k)_{k=1}^{n-1}$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású változók és jelölje τ_1^* a legkisebb elemet, vagyis $\tau_1^* \circeq \min \tau_k$. $\{\tau_1^*<x\}$ pontosan akkor, ha legalább egy elem az $(n-1)$-ből kisebb mint x, tehát

$$F_1(x) \circeq \mathbf{P}(\tau_1^*<x)=1-(1-x)^{n-1}.$$

A τ_1^* sűrűségfüggvénye

$$F_1'(x) = (n-1)(1-x)^{n-2}$$

amely éppen azonos az $f_1(x)$ függvénnyel, vagyis az η_1 eloszlása azonos a τ_1^* eloszlásával. Hasonlóan a $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$ eloszlása $\Gamma(k,\lambda)$ a $\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i$ eloszlása $\Gamma(n-k,\lambda)$ így az η_k eloszlása $B(k, n-k)$, amely sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}.$$

Határozzuk meg az τ_k^* eloszlásfüggvényét. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen először τ_k^* egyenletes eloszlásból származó n elemű rendezett minta k-dik eleme. A $\{\tau_k^* < x\}$ esemény ekvivalens avval, hogy legalább k változó kisebb mint x. Ebből

$$F_k(x) \overset{\circ}{=} \mathbf{P}(\tau_k^* < x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

A derivált kiszámolásának komplikáltsága miatt a sűrűségfüggvény meghatározása a következő:

$$\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} = \frac{\mathbf{P}(x \le \tau_k^* < x+h)}{h}.$$

Tekintsük a $0 \le x < x+h$ intervallumokat. A $\mathbf{P}(x \le \tau_k^* < x+h)$ annak a valószínűsége, hogy legfeljebb $(k-1)$ változó kisebb mint x és legalább k változó kisebb mint $x+h$. Annak a valószínűsége, hogy r változó esik az $[x, x+h)$ intervallumba $h^r = o(h^{r-1})$ nagyságrendű, így egyedül az $r = 0$, illetve az $r = 1$ eseteket kell megvizsgálnunk. Ha az $\{x \le \tau_k^* < x+h\}$ esemény teljesül, akkor az $r = 0$ lehetetlen, így a sűrűségfüggvény meghatározásakor egyedül az $r = 1$ esetet kell kiszámolnunk. Ilyenkor $k-1$ elem kisebb mint x, egy az $[x, x+h)$ intervallumban van és $n-k$ elem nagyobb mint x, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x \le \tau_k^* < x+h) &= n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot h \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} + \\ &\quad + o(h).\end{aligned}$$

Ebből a sűrűségfüggvény

$$n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k}.$$

Ha n helyébe $(n-1)$-et írunk, akkor éppen az η_k sűrűségfüggvényét kapjuk.

□

14. Példa. *Rendezett minta sűrűségfüggvénye.*

Legyenek a $(\xi_k)_{k=1}^n$ változók függetlenek és rendelkezzenek azonos eloszlással. Jelölje F a közös eloszlásfüggvényt és f a közös sűrűségfüggvényt. Ha ξ_k^* jelöli a rendezett minta k-dik elemét akkor az előző példa gondolatmenetét általánosítva

$$\begin{aligned}\frac{F_k(x+h)-F_k(x)}{h} &= \frac{\mathbf{P}\left(x \leq \xi_k^* < x+h\right)}{h} = \\ &= n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot f(x)\, h \cdot F(x)^{k-1} \cdot (1-F(x))^{n-k} + \\ &\quad +o(h),\end{aligned}$$

vagyis a ξ_k^* sűrűségfüggvénye

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot f(x) \cdot F(x)^{k-1} \cdot (1-F(x))^{n-k}.$$

□