1. Példa. *Az $N(0,1)$ standard normális eloszlás Fourier-transzformáltja*

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)(\cos tx + i \sin tx)\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cos tx dx
\end{aligned}$$

t szerinti deriváltját, majd a deriváltat parciálisan integrálva x szerint

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x \sin tx dx = \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sin tx\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) t \cos tx dx = \\
&= -t\varphi(t).
\end{aligned}$$

Mivel a Fourier-transzformált elemi tulajdonságai miatt $\varphi(0) = 1$, ezért a normális eloszlás Fourier-transzformáltja eleget tesz a

$$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi(t), \quad \varphi(0) = 1 \tag{1}$$

egyenletnek. Közvetlen behelyettesítéssel látható, hogy a $\varphi(t) = \exp\left(-t^2/2\right)$ eleget tesz a (1) egyenletnek, és a kezdeti érték feladat egyértelmű megoldhatósága miatt az $\exp\left(-t^2/2\right)$ az egyetlen megoldása az egyenletnek.

□

2. Példa. *A λ paraméterű Poisson eloszlás Fourier-transzformáltja*

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

Valóban

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \exp(itk) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\exp(it))^k = \\
&= \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).
\end{aligned}$$

□

3. Állítás. *A $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha*

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2,$$

ahol φ_1 a $\boldsymbol{\xi}_1$ és φ_2 a $\boldsymbol{\xi}_2$ Fourier-transzformáltja, és φ a $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ közös eloszlásának Fourier-transzformáltja.

Bizonyítás: Ha $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ függetlenek, akkor a felbontás teljesül. A fordított irány a monoton osztály tétel elemi következménye: Rögzítsünk egy $\mathbf{v}$ vektort és legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(u\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\cdot\exp\left(i\left(\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)\right)=\mathbf{E}\left(u\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(i\left(\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)\right).$$

Az $\mathcal{L}$ nyilvánvalóan λ-rendszer, ugyanis tartalmazza a konstans függvényeket, lineáris tér, és ha $u_n\in\mathcal{L}$ és (u_n) egyenletesen korlátos és $u_n\to u$, akkor $u\in\mathcal{L}$. A feltétel szerint az $\mathcal{L}$ tartalmazza az

$$u\left(\mathbf{x}\right)=\exp\left(i\left(\mathbf{u},\mathbf{x}\right)\right),$$

alakú függvényekből álló π-rendszert. Így tartalmazza ezen π-rendszer által generált σ-algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden B Borel-mérhető halmazra

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\cdot\exp\left(i\left(\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)\right) &= \mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(i\left(\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)\right)=\\ &= \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_1\in B\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(i\left(\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Most legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos és mérhető v függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\cdot v\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)=\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_1\in B\right)\cdot\mathbf{E}\left(v\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right).$$

A már bemutatott módon megmutatható, hogy minden D Borel-mérhető halmazra a $\nu=\chi_D$ függvény eleme az $\mathcal{L}$ rendszernek. Így

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_1\in B,\boldsymbol{\xi}_2\in D\right)=\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\cdot\chi_D\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)=\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_1\in B\right)\cdot\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_2\in D\right).$$

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ vektorok függetlenek.

□

4. Állítás. *Ha a $\boldsymbol{\xi}_1$ és a $\boldsymbol{\xi}_2$ vektorok Fourier-transzformáltjai megegyeznek, akkor az eloszlásaik is megegyeznek.*

Bizonyítás: A bizonyítás hasonló az előző állítás indoklásához. Jelölje $\mathcal{L}$ az olyan u korlátos mérhető függvények halmazát, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(u\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\right)=\mathbf{E}\left(u\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right).$$

Ismételten az $\mathcal{L}$ triviálisan λ-rendszer, amely tartalmazza, az $\exp\left(i\left(\mathbf{u},\mathbf{x}\right)\right)$ alakú trigonometrikus függvények π-rendszerét. A monoton osztály tétel miatt az $\mathcal{L}$ tartalmazza a trigonometrikus polinomok által generált σ-algebra elemeinek karakterisztikus függvényeit. Ez utóbbi σ-algebra megegyezik a folytonos függvények által generált σ-algebrával[1], vagyis a Borel-halmazokkal. Ebből következően tetszőleges B Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_1\in B\right)=\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_1\right)\right)=\mathbf{E}\left(\chi_B\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right)=\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}_2\in B\right),$$

vagyis a két eloszlás valóban megegyezik.

□

[1] Ez tulajdonképpen a Weierstrass-féle approximációs tétel.