1. Folytonos Lévy-folyamatok és a centrális határeloszlás tétele

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges. Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke. Következésképpen ha m jelöli az $X(1)$ várható értékét, akkor az $X(t)-t\cdot m$ martingál. Érdemes hangsúlyozni, hogy annak igazolásához, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t\cdot m$ vagy fel kell használni hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t)-E(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, vagy fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható. Az $X(t)-t\cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál. A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m=0$. A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat. A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} [X](t)-\mathbf{E}([X](t)) = [X](t)-t\cdot\mathbf{E}([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú. A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = \mathbf{E}([X](t)) = a\cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}\exp(iuX(t))-1 = {} & iu\int_0^t \exp(iuX(s))dX(s) - \\ & -\frac{1}{2}u^2\int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s).\end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right) - 1 &= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left[X\right](s)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d\left(as\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \mathbf{E}\left(\exp(iuX(s))\right)ds.\end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u,t) \doteq \mathbf{E}\left(\exp(iuX(t))\right)$ jelölést, akkor ez

$$\varphi(u,t) - 1 = -\frac{1}{2}u^2 a\int_0^t \varphi(u,s)\,ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt} = -\frac{1}{2}u^2 a\varphi(u,t).$$

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi(u,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X(t) \cong N\left(0, \sqrt{at}\right).$$

Ebből, mivel az X Lévy-folyamat, következően az $X/\sqrt{a}$ Wiener-folyamat. Az általános esetben m nem nulla, így teljesül a következő:

1.1 Állítás.
Minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend lineáris kombinációja.

2. A Lévy-féle karakterizációs tétel

A Lévy-féle karakterizációs tétel hasonló az imént belátott állításhoz: A Wiener-folyamatokat a folytonos lokális martingálok körében karakterizálja. Ha X folytonos lokális martingál és ha $[X](t) = t$, akkor a már bemutatott módon belátható, hogy $X(t) \cong N\left(0, \sqrt{t}\right)$. A gondolatmenetet az újraindított folyamatra alkalmazva ebből könnyen belátható, hogy a növekmények eloszlása $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ebből azonban még nem következik, hogy a folyamat Wiener-folyamat, ugyanis nem tudjuk, hogy a növekmények függetlenek vagy sem. A szórásokra vonatkozó képletből belátható, hogy a növekmények korrelálatlanok, ugyanis teljesül a

$$\mathbf{D}^2\left(X\left(t+s\right)\right)=\mathbf{D}^2\left(X\left(t\right)\right)+\mathbf{D}^2\left(X\left(s\right)\right).$$

Sajnos azonban normális eloszlású változók korrelálatlansága csak akkor implikálja a függetlenséget, ha az együttes eloszlás is normális. Írjuk fel az X exponenciális martingálját:

$$\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\varphi\left(u,t\right)}=\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right)}=\exp\left(iuX\left(t\right)+\frac{1}{2}u^2t\right).$$

Mivel $[X](t)=t$ az Itô-formulával azonnal látható, hogy a kifejezés lokális martingál. Mivel ugyanakkor minden véges szakaszon egyenletesen korlátos, ezért nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál is. Ezen a ponton érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy tetszőleges folyamat esetén az

$$\frac{\exp\left(iuX\left(t\right)\right)}{\varphi\left(u,t\right)}$$

exponenciális martingál nem lesz martingál sőt lokális martingál sem. Az Itô-formulából azonnal következik, hogy egy L lokális martingál esetén az

$$Z\mathrel{\hat{=}}\exp\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)$$

kifejezés lokális martingál és ezt szokás a lokális martingál exponenciális martingáljának mondani. Valóban az exponenciális függvény deriválási szabályát kihasználva

$$\begin{aligned}Z\left(t\right)-Z\left(0\right)&=\\ =\int_0^t Zd\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)+\frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right]&=\\ =\int_0^t Zd\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)+\frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L\right]&=\\ =\int_0^t ZdL,&\end{aligned}$$

amely kifejezés egy lokális martingál szerint sztochasztikus integrál, vagyis lokális martingál. Mivel a zL is lokális martingál, nyilván tetszőleges z-re az

$$\exp\left(zL-\frac{1}{2}\left[zL\right]\right)=\exp\left(zL-\frac{1}{2}z^2\left[L\right]\right)$$

is lokális martingál. A jelen példában a $z=iu$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\exp\left(iuX\left(t\right)+\frac{1}{2}u^2t\right)$$

kifejezést. Vagyis kihasználva, hogy az $X(t)$ eloszlása normális az exponenciális martingál két különböző definíciója egybeesik. Mivel az

$$\frac{\exp(iuX)}{\varphi(u,t)}$$

kifejezés martingál, ezért ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u,t)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{\exp(iuX(s))}{\varphi(u,s)}.$$

Ezt átrendezve

$$\mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s))) \mid \mathcal{F}_s) = \frac{\varphi(u,t)}{\varphi(u,s)} = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2(t-s)\right).$$

A feltételes várható érték definícióját felírva minden $F \in \mathcal{F}_s$ halmazra

$$\int_F \exp(iu(X(t) - X(s)))\,d\mathbf{P} = \mathbf{P}(F)\,\mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s)))).$$

A monoton osztály tétel segítségével az $\exp(iux)$ helyébe tetszőleges Borel-mérhető halmaz karakterisztikus függvénye írható, így

$$\mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\} \cap F) = \mathbf{P}(F) \cdot \mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\})$$

vagyis az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra és az $X(t) - X(s)$ növekmények függetlenek, vagyis az X független növekményű. evvel beláttuk a következő tételt:

2.1 Tétel. (Lévy-féle karakterizációs tétel)

Ha X olyan folytonos lokális martingál, amelyre $X(0) = 0$ és $[X](t) = t$, akkor az X Wiener-folyamat.

2.2 Példa.

A $\operatorname{sgn}(w) \bullet w$ integrál Wiener-folyamat.

A sztochasztikus integrál konstrukciója szerint a folyamat folytonos és lokális martingál. A kvadratikus variációja

$$\int_0^t (\operatorname{sgn}(w))^2(s)\,ds = t.$$

□

2.3 Példa.

Lévy-folyamatok összege nem feltétlenül Lévy-folyamat.

Legyen w Wiener folyamat és legyen

$$X(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}(w(s))\, ds.$$

Az X szintén Wiener-folyamat. A

$$Z \stackrel{\circ}{=} w + X = 1 \bullet w + \operatorname{sgn}(w(s)) \bullet w = (1 + \operatorname{sgn}(w(s))) \bullet w$$

mint folytonos martingálok összege szintén folytonos martingál az eredeti közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve.

$$[Z](t) = \int_0^t (1 + \operatorname{sgn}(w(s)))^2 (s)\, ds$$

amely kifejezés nem determinisztikus. Így a Z nem lehet Wiener-folyamat. De mivel minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend összege, ezért a Z nem lehet Lévy-folyamat.

$\square$