1. Tétel (Wiener folyamatok visszatérése az origóba). *Ha* $d \geq 3$ *és* $\mathbf{w}$ *valamely* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *pontból induló* d*-dimenziós Wiener folyamat, akkor*

$$\mathbf{P}(\vartheta \leq r) = \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{d-2}, \quad ha \quad 0 \leq r \leq \|\mathbf{x}\|$$

ahol

$$\vartheta \triangleq \inf\{\|w(t)\| : t \geq 0\}.$$

Az egyenlőség akkor is érvényben marad, ha $\mathbf{x}$ *olyan valószínűségi változó amelyre az* $\|\mathbf{x}\|$ *konstans.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt halmazon értelmezett f függvény *harmonikus*, vagyis kielégíti az

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0, \quad f \in C^2(U) \tag{1}$$

Laplace egyenletet. Legyen τ megállási idő. A megállási opciókról szóló tétel miatt a $\mathbf{w}^\tau$ megállított folyamat martingál marad. Ha az $\mathbf{x}$ pontból kiinduló $\mathbf{w}^\tau$ megállított folyamat az U-ban marad, akkor az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{w}(0)) &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{w}^\tau) \bullet \left[w_i^\tau, w_j^\tau\right]. \end{aligned}$$

Ha $i \neq j$ akkor

$$\left[w_i^\tau, w_j^\tau\right] = [w_i, w_j]^\tau = 0^\tau = 0.$$

Mivel $[w_i^\tau](s) = [w_i]^\tau(s) = s \wedge \tau$, ezért

$$\begin{gathered} f(\mathbf{w}^\tau(t)) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{w}^\tau(t)) - f(\mathbf{w}(0)) = \\ = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau)\, dw_k^\tau + \frac{1}{2}\int_0^\tau (\Delta f)(\mathbf{w}^\tau(s))ds = \\ = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau)\, dw_k^\tau. \end{gathered} \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy $\tau < \infty$ és a $\mathbf{w}$ korlátos a $[0, \tau]$ véletlen időintervallumon. Ilyenkor a (2) sorban szereplő sztochastikus integrál integrandusa korlátos, következésképpen a sztochasztikus integrál martingál. Így

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}^\tau(t))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{w}(t \wedge \tau))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{w}(0))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})).$$

A feltételezés szerint a $\mathbf{w}$ korlátos a $[0, \tau]$ véletlen szakaszon, így a majorált konvergencia tétele használható. Ha $t \to \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})). \tag{3}$$

A (3) formula segítségével az állítás már egyszerű számolással belátható:

1. Közvetlen számolással igazolható, hogy mivel $d \geq 3$ az $U \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nyílt halmazon az

$$f(\mathbf{u}) \mathrel{\hat{=}} \|\mathbf{u}\|^{2-d} \tag{4}$$

függvény kielégíti az (1) Laplace egyenletet.

2. Tegyük fel, hogy az $\|\mathbf{x}\|$ az $0 < r < R < \infty$ sugarak között helyezkedik el. A Wiener folyamatok trajektóriái folytonosak és egy valószínűséggel nem korlátosak, így a $\mathbf{w}$ egy valószínűséggel kilép az

$$B \mathrel{\hat{=}} \{\mathbf{u} : r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R\}$$

d-dimenziós gyűrűből.

3. Legyen

$$\tau_{\partial B} \mathrel{\hat{=}} \inf\{t : w(t) \in \partial B\}.$$

A (3) formula szerint felhasználva, hogy az $f(\mathbf{x})$ a tétel feltételei és a (4) definíció miatt determinisztikus

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau_{\partial B}))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}). \tag{5}$$

A várható érték képletét felírva, felhasználva, hogy a $\mathbf{w}$ egy valószínűséggel kilép a B-ből és a kilépés időpontjában a $\mathbf{w}$ a B határán van

$$r^{2-d}\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_{\partial B})\| = r) + R^{2-d}(1 - \mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_{\partial B})\| = r)) = \|\mathbf{x}\|^{2-d}.$$

Ezt átrendezve

$$\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_{\partial B})\| = r) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}.$$

$d \geq 3$, így ha $R \to \infty$, akkor $R^{2-d} \to \infty$, amiből a bizonyítandó állítás már nyilvánvaló.

□

2. Következmény. *Ha $d \geq 3$ és $\mathbf{w}$ egy d-dimenziós Wiener folyamat, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty.$$

Bizonyítás: Legyen $r > 0$ tetszőleges és valamely $a > 0$ sugárra definiáljuk a

$$\tau_a \mathrel{\hat{=}} \inf\{t : \|\mathbf{w}(t)\| \geq a\}$$

megállási időt. Mivel majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty$$

ezért majdnem mindenhol $\tau_a < \infty$. Az erős Markov tulajdonság szerint a

$$\mathbf{w}^*(t) \mathrel{\hat{=}} (\mathbf{w}(t+\tau_a) - \mathbf{w}(\tau_a)) + \mathbf{w}(\tau_a), \quad t \geq 0$$

olyan Wiener folyamat, amely a

$$\mathbf{w}(\tau_a) \in \{\|\mathbf{u}\| = a\}$$

pontból indul. Következésképpen a belátott tétel szerint ha $a \nearrow \infty$, akkor

$$\mathbf{P}(\exists t \geq \tau_a, \|\mathbf{w}(t)\| \leq r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{d-2} \to 0.$$

Legyen $a_n \nearrow \infty$. A képlet alapján tetszőleges $r > 0$ esetén annak a valószínűsége, hogy a $\mathbf{w}(t)$ minden τ_{a_n} után visszatér a $B_r \triangleq \{\|\mathbf{u}\| \leq r\}$ gömbe nullához tart. Másképpen egy valószínűséggel tetszőleges ω-hoz van olyan n hogy a $w(t, \omega)$ trajektória nem metszi a B_r gömböt a $\tau_{a_m}(\omega) < \infty$ időpont után. Másképpen egy valószínűséggel $\|\mathbf{w}(t)\| \to \infty$.

$\square$