Lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek

A pénzügyi elméletből közismert Black–Scholes-modellben a részvények ármozgását a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad S(t) = s$$

egyenlettel írjuk le. Az egyenletben μ és σ konstansok. A jelölésen a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$S(T) - S(t) = \int_t^T \mu \cdot S(u)\, du + \int_t^T \sigma \cdot S(u)\, dw(u)$$

integrálegyenlet értendő. Általában a sztochasztikus differenciálegyenleteket igen nehéz megoldani. Ebben az esetben azonban a megoldás explicite megadható:

$$S(T) = s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t) + \sigma \cdot w(T-t)\right). \tag{1}$$

Valóban, az Itô-formula időtől függő verziója alapján

$$\begin{aligned} & S(T) - S(t) = \\ = \quad & \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(u)\, du + \sigma \int_t^T S(u)\, dw + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2 S(u)\, du = \\ = \quad & \mu \int_t^T S(u)\, du + \sigma \int_t^T S(u)\, dw. \end{aligned}$$

Példa: Számoljuk ki az $N(t) \triangleq \exp(w(t) - t/2)$ exponenciális martingál négyzetének kompenzátorát!

Emlékeztetünk, hogy az N^2 kompenzátorán azt a monoton növekedő P folytonos folyamatot értjük, amelyre az $N^2(t) - P(t)$ folyamat lokális martingál. Tetszőleges N folytonos martingál esetén az Itô-formula, illetve a parciális integrálás formulája szerint

$$\begin{aligned} N^2(t) - N^2(0) &= \int_0^t 2N dN + \frac{1}{2}\int_0^t 2d[N] = \\ &= \int_0^t 2N dN + [N](t). \end{aligned}$$

Az $[N]$ monoton növekedő, az $\int_0^t 2N dN$ sztochasztikus integrál, miként minden martingál szerinti sztochasztikus integrál, lokális martingál, tehát az N^2 kompenzátora az $[N]$ kvadratikus variáció. Ugyanakkor, ha $\mu = 0$, $\sigma = 1$, akkor a lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása éppen N, vagyis

$$N(t) - N(0) = \int_0^t N(u)\, dw(u), \quad N(0) = 1.$$

Vegyük észre, hogy ez a

$$dN = N dw$$

módon írható, vagyis az N exponenciális martingál éppen az

$$\frac{dy}{dx} = y \Longrightarrow dy = ydx$$

egyenlet sztochasztikus párja[1]. A polaritási formula szerint az

$$N(t) - 1 = \int_0^t N(u)\, dw(u)$$

integrál kvadratikus variációja

$$\begin{aligned} [N](t) &= \int_0^t N^2(s)\, d[w](s) = \int_0^t N^2(s)\, ds = \\ &= \int_0^t \exp(2w(s) - s)\, ds. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $P = [N]$ kompenzátor mint sztochasztikus folyamat függ az ω kimeneteltől, vagyis nem determinisztikus.

□

Parciális differenciálegyenletek megoldása Itô-formulával

Tekintsük az opcióárazás elméletében megismert Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletet (PDE):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf,$$
$$f(T, S) = \max\{S - X, 0\}.$$

Ez speciális esete a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + rf + k = 0, \qquad (2)$$
$$f(T, x) = \Phi(x)$$

egyenletnek, ahol μ, σ, k a keresett f függvényhez hasonlóan a (t, x) független változók függvényei, az r pedig konstans. A parciális differenciálegyenlet megoldását sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) segítségével adjuk meg. Tekintsük először az általános PDE-hez tartozó következő úgynevezett Cauchy-problémát[2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k = 0, \qquad (3)$$

[1] Éppen ez indokolja az elnevezést.

[2] Vegyük észre, hogy a feladat homogén, vagyis nem tartalmazza az f függvényt, csak a deriváltjait, vagyis az rf tagot elhagytuk.

$$f(T,x) = \Phi(x).$$

A parciális differenciálegyenlethez formálisan[3] rendeljük hozzá a

$$\begin{aligned} dX(s) &= \mu(s, X(s))\, ds + \sigma(s, X(s))\, dw(s), \\ X(t) &= x \end{aligned}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az idő jelölésére a t helyébe s kerül, a t időparaméter és az x helyparaméter a kezdeti feltételben jelenik meg. Ismételten megjegyezzük, hogy a sztochasztikus differenciálegyenletre felírt, sztochasztikus analízisben megszokott jelölés valójában a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$X(T) - x = X(T) - X(t) = \int_t^T \mu(s, X(s))\, ds + \int_t^T \sigma(s, X(s))\, dw(s)$$

integrálegyenlőség teljesülését jelenti. Vezessük be az úgynevezett Dynkin-operátort, amely a PDE-ben szereplő x szerint vett deriváltakat tartalmazó tagokból áll:

$$Af \mathrel{\hat{=}} \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Az A segítségével a (3) PDE

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Af + k = 0, \quad f(T,x) = \Phi(x) \tag{4}$$

módon írható. Legyen[4] $f(t,x) \in C^2$ az egyenlet megoldása. Az időtől függő Itô-formula alapján

$$df = \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d[X],$$

ugyanis a másodrendű tagban az idő szerinti kvadratikus keresztvariáció. illetve az idő szerinti kvadratikus variáció nulla. Az X képletét a dX tagba behelyettesítve az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dX = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu ds + \sigma dw) = \mu \frac{\partial f}{\partial x} ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Az X két tag összege, így az

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

nevezetes elemi algebrai összefüggés triviális alkalmazásával kapható

$$[A+B] = [A] + 2[A,B] + [B]$$

[3]Hangsúlyozni kell, hogy a hozzárendelés formális, következésképpen mechanikus.

[4]Az $f \in C^2$ jelölés azt jelenti, hogy az f kétszer folytonosan deriválható.

formula szerint

$$[X] = [\mu ds + \sigma dw] = [\mu ds] + 2 [\mu ds, \sigma dw] + [\sigma dw] .$$

Vegyük észre, hogy a

$$\int_0^t \mu (s, X (s)) \, ds$$

kifejezés minden trajektóriája folytonos és véges változású. Ha a kvadratikus kereszt variációban valamelyik kifejezés véges megváltozású és a másik folytonos, akkor a kvadratikus kereszt variáció nulla, így

$$[X] = [\sigma dw] .$$

A sztochasztikus integrálok kvadratikus variációjának képlete miatt

$$[\sigma dw] (t) \overset{\circ}{=} \left[\int_0^t \sigma dw \right] = \int_0^t \sigma^2 d [w] = \int_0^t \sigma^2 ds.$$

A Dynkin-operátor mint jelölés segítségével a kifejezés

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d [X] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial s} ds + \mu \frac{\partial f}{\partial x} ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ds = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A f \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw. \end{aligned}$$

Az egyenlőséget integrálként részletesen kírva és felhasználva, hogy az f megoldása a PDE-nek, vagyis teljesül a (4):

$$\begin{aligned} f (T, X (T)) - f (t, X (t)) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A f \right) ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dw = \qquad (5) \\ &= \int_t^T -k ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dw. \end{aligned}$$

Ha a második tag elég jó, vagyis a sztochasztikus integrál nem csak lokális martingál[5], hanem valódi martingál. akkor mind a két oldalon várható értéket véve, a megszokott módon felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (f (T, X (T)) - f (t, X (t))) &= \mathbf{E} \left(\int_t^T -k ds \right) + \mathbf{E} \left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} \sigma dw \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\int_t^T -k ds \right) . \end{aligned}$$

[5] Általános körülmények között ere nagyon nehéz valamit mondani.

Mivel az $X(s)$ eleget tesz az SDE-nek, ezért a kezdeti feltétel miatt $X(t) = x$, tehát az

$$f(t, X(t)) = f(t, x)$$

konstans. Az összefüggést átalakítva

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(f(T, X(T)) - f(t, X(t))\right) &= \mathbf{E}\left(f(T, X(T)) - f(t, x)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(f(T, X(T))\right) - f(t, x) = \\
&= \mathbf{E}\left(\int_t^T -k(s, X(s))\, ds\right).
\end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned}
f(t, x) &= \mathbf{E}\left(f(T, X(T))\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T k(s, X(s))\, ds\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\Phi(X(T))\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T k(s, X(s))\, ds\right),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az f megoldása az (2) feladatnak, tehát minden y-ra

$$f(T, y) = \Phi(y).$$

Így

$$f(T, X(T)) = \Phi(X(T)).$$

A közgazdasági alkalmazásokban általában $k = 0$, így ilyenkor

$$f(t, x) = \mathbf{E}\left(\Phi(X(T))\right),$$

vagyis a parciális differenciálegyenlet megoldása, a T időpontban levő peremérték segítségével várható értékeként számolható.

1. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{E}$ várható érték a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó valószínűség szerint értendő. A sztochasztikus differenciálegyenlet egy matematikai segédeszköz, amely közvetlenül a parciális differenciálegyenlethez tartozik és ezért teljesen független attól, hogy miként jutottunk a parciális differenciálegyenlethez. A derivatív árazás elméletében a parciális differenciálegyenletet egy másik sztochasztikus differenciálegyenletből vezetjük le, amely egyenlet az árak mozgását írja le és amely egyenlet a statisztikailag megfigyelhető valószínűségi mező felett van értelmezve. A parciális differenciálegyenlet megoldásakor használt segédmező azonban egy másik valószínűség[6], amelyet szokás kockázatmentes valószínűségi mezőnek nevezni és amely elvileg semmilyen kapcsolatban sincsen az eredeti problémában szereplő statisztikailag megfigyelt adatokra támaszkodó valószínűségi mezővel.

[6] Amely csak a matematikusok által kreált fantáziavilágban létezik.

2. Ha a sztochasztikus integrálról nem tudjuk, hogy martingál, vagyis csak lokális martingál, akkor egy lokalizációs sorozattal megállítva a (**??**) sorban a T helyébe egy $(T \wedge \tau_n)$ megállási idő sorozat is írható. Ilyenkor analóg módon számolva

$$f(t,x) = \mathbf{E}\left(\Phi\left(X\left(T \wedge \tau_n\right)\right)\right).$$

Ezt követően vehetjük az $n \nearrow \infty$ határértéket, amely például a Φ korlátossága, vagy alkalmas integrálhatósága esetén az integrál alatt is elvégezhető.

Térjünk visssza az eredeti

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k + rf = 0, \quad f(T,x) = \Phi(x)$$

inhomogén PDE-re. Az inhomogén egyenlet helyett vegyük a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k \exp(rt) = 0, \quad h(T,x) = \exp(rT)\,\Phi(x) = \Psi(x)$$

homogén egyenletet. Vezessük be az

$$f(t,x) = \exp(-rt)\, h(t,x)$$

függvényt, vagyis

$$h(t,x) = \exp(rt)\, f(t,x).$$

Mivel

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\exp(rt)\, f(t,x) = r\exp(rt)\, f(t,x) + \exp(rt)\,\frac{\partial}{\partial t} f(t,x),$$

ezért

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k\exp(rt) = \\ &= \exp(rt)\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + rf + k\right], \end{aligned}$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + rf + k = 0.$$

A már bemutatott módon a homogén egyenletet megoldva

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(h\left(T, X(T)\right)\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k\left(s, X(s)\right) ds\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\Psi\left(X(T)\right)\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k\left(s, X(s)\right) ds\right) = \\ &= \exp(rT)\,\mathbf{E}\left(\Phi\left(X(T)\right)\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T \exp(rs)\, k\left(s, X(s)\right) ds\right), \end{aligned}$$

az inhomogén egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \exp(r(T-t))\,\mathbf{E}(\Phi(X(T))) + \\ &\quad + \exp(-rt)\,\mathbf{E}\left(\int_t^T \exp(rs)\,k(s,X(s))\,ds\right). \end{aligned}$$

Ha $k=0$, akkor

$$f(t,x) = \exp(r(T-t))\,\mathbf{E}(\Phi(X(T)))\,.$$

0.1

Példák

Tekintsünk néhány példát:

1. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(T,x) = x^2$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet

$$dX(s) = 0 \cdot ds + \sigma dw(s)\,, \quad X(t) = x.$$

Az egyenlet könnyen megoldható, a megoldása

$$X(s) = x + \sigma(w(s) - w(t))\,.$$

A Wiener-folyamat tulajdonságai alapján $X(s) \cong N\left(x, \sigma\sqrt{s-t}\right)$. Ezt felhasználva a megoldás

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(X^2(T)\right) = \mathbf{D}^2(X(T)) + \mathbf{E}^2(X(T)) = \\ &= \sigma^2(T-t) + x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2 + \sigma^2 = 0 \\ h(T,x) &= \sigma^2(T-T) + x^2 = x^2. \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + x = 0, \quad h(T,x) = \ln x^2$$

PDE-tet.

Hagyjuk először el a $k(t,x)=x$ konstans tagot, vagyis tekintsük a

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0,\quad h(T,x)=\ln x^2$$

egyenletet. Rendeljük hozzá a

$$dX(s)=0\cdot ds+X(s)\,dw(s)=X(s)\,dw(s)\,,\quad X(t)=x,$$

SDE-tet. Az egyenlet ismételten könnyen megoldható. A (1) képlet alapján

$$X(s)=x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t)+w(s-t)\right).$$

Az $X(T)$ változót a $\Phi(x)=\ln x^2$ függvénybe betéve

$$\ln\left(X^2(T)\right)=-(T-t)+2N\left(0,\sqrt{T-t}\right)+\ln x^2,$$

amiből

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(-(T-t)+2N\left(0,\sqrt{T-t}\right)+\ln x^2\right)= \\ &= (t-T)+\ln x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 1+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)'= \\ &= 1+x^2\left(\frac{1}{x}\right)'= \\ &= 1+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0. \\ h(T,x) &= (T-T)+\ln x^2= \\ &= \ln x^2. \end{aligned}$$

Az eredeti egyenletet az

$$f(t,x)=\mathbf{E}\left(\Phi(X(T))\right)+\int_t^T \mathbf{E}\left(k(s,X(s))\right)ds$$

általános formula alapján oldjuk meg, ahol $k(s,x)$ az általános szabad konstans tag a (3) egyenletben[7]. A lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(k(s,X(s))\right) &= \mathbf{E}\left(X(s)\right)=\mathbf{E}\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t)+\frac{1}{2}w(s-t)\right)\right) \\ &= x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t)+\frac{1}{2}(s-t)\right)=x, \end{aligned}$$

[7]Feltéve, hogy a két integrál felcserélhető, de ezt igen általános feltételek mellett meg lehet tenni. A legegyszerűbben ellenőrizhető feltétel, hogy a kettős integrálban szereplő integrandus nem negatív.

amiből

$$\int_t^T \mathbf{E}\left(k\left(s,X\left(s\right)\right)\right)ds = x\int_t^T 1ds = x\left(T-t\right).$$

Ez alapján

$$f\left(t,x\right) = \left(t-T\right) + \ln x^2 + x\left(T-t\right).$$

Valóban

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + x &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)' + x = \\
&= 1 + x^2\left(\frac{1}{x}\right)' = 0
\end{aligned}$$

$$f\left(T,x\right) = \ln x^2.$$

3. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 0, \\
h\left(T,x\right) &= x^2
\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet.

$$dX\left(s\right) = 1ds + \sigma dw\left(s\right), \quad X\left(t\right) = x.$$

Az egyenlet

$$\begin{aligned}
X\left(T\right) - x &= \int_t^T ds + \sigma\int_t^T dw = T - t + \sigma\left[w\left(T\right) - w\left(t\right)\right] \cong \\
&\cong N\left(T-t, \sigma\sqrt{T-t}\right).
\end{aligned}$$

A megoldóképlet alapján

$$h\left(t,x\right) = \mathbf{E}\left(N^2\left(x+T-t,\sigma\sqrt{T-t}\right)\right) = \sigma^2\left(T-t\right) + \left(x+T-t\right)^2.$$

Valóban

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2 + 2\left(x+T-t\right)\left(-1\right) + \\
&\quad +2\left(x+T-t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h\left(T,x\right) = x^2.$$

4. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}+x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} &= 0, \\ h(T,x) &= \ln x^2 \end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s)=X(s)\,ds+X(s)\,dw(s)\,,\quad X(t)=x$$

sztochasztikus egyenletet, amely lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s)=x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t)+w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right)=\ln x^2+\mathbf{E}\left(N\left(T-t,\sqrt{T-t}\right)\right)= \\ &= \ln x^2+T-t. \end{aligned}$$

Valóban a peremfeltétel triviálisan teljesül, és

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t}+x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2}= \\ = & -1+x\frac{2}{x}+\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right)= \\ = & -1+2-1=0. \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}+x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2}+x^2 &= 0, \\ h(T,x) &= \ln x^2 \end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s)=X(s)\,ds+X(s)\,dw(s)\,,\quad X(t)=x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Ez ismételten lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s)=x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t)+w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$h(t,x) = \mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right) + \int_t^T \mathbf{E}\left(X^2(s)\right) ds.$$

Az egyes komponenseket kiszámolva

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right) &= \mathbf{E}\left(\ln x^2 + 2\left[\frac{1}{2}(T-t) + w(T-t)\right]\right) = \\
&= \ln x^2 + \mathbf{E}\left(N\left((T-t), 2\sqrt{T-t}\right)\right) = \\
&= \ln x^2 + T - t,
\end{aligned}$$

illetve a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned}
\int_t^T \mathbf{E}\left(X^2(s)\right) ds &= x^2 \int_t^T \mathbf{E}\left(\exp\left(s - t + 2w(s-t)\right)\right) ds = \\
&= x^2 \int_t^T \exp\left(3(s-t)\right) ds = \\
&= x^2 \left[\exp\left(3(s-t)\right)\right]_t^T = \\
&= \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3(T-t)\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$h(t,x) = \ln x^2 + T - t + \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3(T-t)\right) - 1\right).$$

Ha $t = T$, akkor

$$h(T,x) = \ln x^2,$$

vagyis teljesül a peremfeltétel. Az egyenletbe behelyettesítve

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} + x^2 = \\
&-1 - x^2 \exp\left(3(T-t)\right) + \\
&+2x\frac{1}{x} + \frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3(T-t)\right) - 1\right] + \\
&-\frac{2}{2}x^2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3(T-t)\right) - 1\right] + \\
&x^2,
\end{aligned}$$

amely az összevonásokat elvégezve nulla.