Felvethető a kérdés, hogy egy lokális martingál, mikor lesz martingál? A kérdés természetesen főleg azért érdekes, mert tudni szeretnénk, hogy egy sztochasztikus integrál mikor lesz martingál, ugyanis ilyenkor a várható értéke nulla lesz minden -re. Ha L lokális martingál és (τ_n) a megfelelő lokalizációs sorozat, akkor

$$\mathbf{E}\left(L^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(L(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right) = L(s \wedge \tau_n) = L^{\tau_n}(s)$$

valahányszor $t > s$. Ha $n \nearrow \infty$, akkor mivel a lokalizáció definíciója miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(L(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n\to\infty} L(s \wedge \tau_n) = L(s).$$

A kérdés csak az, hogy mikor vihető be a feltételes várható értékbe a határérték. Erre számos általános tétel ismert, a legegyszerűbb talán, ha az $L(t)$-nek t-szerint van integrálható majoránsa. Az integrálható majoráns létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$\sup_t |L(t)|$$

változó integrálható legyen. Erre vonatkozóan hasznos az úgynevezett Davis-féle egyenlőtlenség, amely a $\sup_t |L(t)|$ integrálhatóságának szükséges és elegendő feltételét adja meg a folyamat kvadratikus variációjának segítségével:

1. Állítás. *Vannak olyan c és C univerzális konstansok, hogy tetszőleges L lokális martingál és τ megállási idő esetén*

$$c\left\|\sqrt{[L]}(\tau)\right\|_1 \leq \left\|\sup_{t\leq\tau}|L(t)|\right\|_1 \leq C\left\|\sqrt{[L]}(\tau)\right\|_1,$$

ahol a norma a megfelelő változók $L^1(\Omega)$ térben vett normáját jelöli.

A Davis-egyenlőtlenség fontos következménye a következő:

2. Állítás. *Ha M tetszőleges lokális martingál és $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál martingál.*

Bizonyítás: Emlékeztetünk, hogy definíció szerint $X \in \mathcal{L}^2(M)$ ha

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty.$$

A Davis-egyenlőtlenség szerint az $X \bullet M$ sztochasztikus integrálnak pontosan akkor van integrálható majoránsa, ha

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet M]}(\infty)\right) < \infty.$$

A polaritási formula és a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet M]}(\infty)\right) &\leq \sqrt{\mathbf{E}\left([X \bullet M](\infty)\right)} = \sqrt{\mathbf{E}\left(\left(X^2 \bullet [M]\right)(\infty)\right)} \stackrel{\circ}{=} \\
&\stackrel{\circ}{=} \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right)} < \infty.
\end{aligned}$$

□

3. Példa. *Ha* w *Wiener folyamat, akkor az* $\exp(w) \bullet w$ *sztochasztikus integrál martingál.*

Elég megmutatni, hogy tetszőleges véges szakaszon az $\exp(w) \bullet w$ martingál. Ehhez azonban elegendő, hogy tetszőleges t-re

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^t (\exp(w))^2 d[w]\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(2w(s))\, ds\right) = \\
&= \int_0^t \mathbf{E}\left(\exp(2w(s))\right) ds = \\
&= \int_0^t \exp\left(\frac{(2\sqrt{s})^2}{2}\right) ds < \infty,
\end{aligned}$$

ahol természetesen az utolsó sorban felhasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó formulát.

□