0.1 Példa.

L^2-ben korlátos lokális martingál, amelyik nem martingál.

1. Tekintsünk az $\mathbb{R}^3$ térben egy $\mathbf{w}$ standard Wiener–folyamatot. A $t = 0$ pontból eredő problémák elkerülése céljából tegyük fel, hogy a $\mathbf{w}$ folyamatot csak a $t > 0$ időpontokra vizsgáljuk. Ha $t \to \infty$, akkor[1]

$$R(t) \circeq \|\mathbf{w}(t)\|_2 \to \infty.$$

Közvetlen deriválással egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ térben az

$$f(\mathbf{x}) \circeq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

függvény harmonikus, vagyis

$$\Delta f \circeq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f = 0,$$

következésképpen az Itô–formula miatt az $M \circeq 1/R$ lokális martingál, ugyanis a másodrendű tagokat tartalmazó korrekciós tag az Itô–formulában nulla. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) &\circeq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sum_k x_k^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_k \frac{(x_k - u_k)^2}{t}\right) d\lambda_3(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq K < \infty, \end{aligned}$$

vagyis hogy az M folyamat az L^2 térben korlátos.

2. Evidens módon az integrálban csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ körül lehet probléma, de ott az integrál konvergens. Ennek igazolása a következő: Legyenek n és α tetszőlegesek. Jelölje B az $\mathbb{R}^n$ tér egységgömbjét. Ha

$$G(k) \circeq \left\{1/2^{k+1} < \|x\| \leq 1/2^k\right\},$$

akkor

$$\begin{aligned} \int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n &= \int_{B \setminus \{0\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \\ &= \int_{\cup_k G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \sum_k \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n. \end{aligned}$$

A szumma mögött álló integrál minden k-ra triviálisan véges. Mivel

$$2^k G(k) = G(0) = \{1/2 < \|x\| \leq 1\},$$

ezért a helyettesítéses integrálás formulája[2] szerint, ha T jelöli a 2^k-val való szorzást

$$\begin{aligned} \int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n &= \int_{T(G(k))} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \int_{G(k)} \frac{1}{\|T(x)\|^\alpha} \det(T')\, d\lambda_n \\ &= \int_{G(k)} \frac{1}{\|2^k x\|^\alpha} \det\left(\operatorname{diag}\left(2^k\right)\right) d\lambda_n = \\ &= \frac{1}{2^{k\alpha}} \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} 2^{kn} d\lambda_n = \\ &= 2^{k(n-\alpha)} \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n, \end{aligned}$$

[1] Hangsúlyozni kell, hogy a tér dimenziója fontos. Például, ha $n = 1$, akkor a Wiener–folyamat végtelen sokszor visszatér az origóba, vagyis végtelen sokszor a normája nulla. Ha $n = 2$, akkor bár a Wiener–folyamat nem lesz nulla, de a pályái sűrűek a síkban, vagyis az első „jó” dimenzió az $n = 3$.

[2] Ha a maximum normát használjuk, akkor elegendő koordinátánként alkalmazni a helyettesítési formulát.

amiből
$$\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-\alpha)},$$
és ez utóbbi éppen akkor konvergens, ha $n > \alpha$. Mivel most $n = 3$ és $\alpha = 2$, ezért az integrál, miként állítottuk véges.

3. Az $n = 3$ feltétel miatt a Wiener–folyamat nomája majdnem mindenhol végtelenhez tart, ezért $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$. Az L^2-korlátosság miatt a folyamat egyenletesen integrálható. Így a konvergencia nem csak majdnem mindenhol, hanem L^1-ben is teljesül, vagyis
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(M(t)) = \lim_{t\to\infty} \|M(t)\|_1 = 0.$$
Ha M martingál lenne és $t < s$, akkor
$$M(t) = \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t).$$
A torony-szabályból következő
$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) - \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F})\|_1 &\overset{\circ}{=} \mathbf{E}(|\mathbf{E}(\xi - \eta \mid \mathcal{F})|) \leq \\ &\leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(|\xi - \eta| \mid \mathcal{F})) = \\ &= \mathbf{E}(|\xi - \eta|) \overset{\circ}{=} \|\xi - \eta\| \end{aligned}$$
egyenlőtlenség miatt a feltételes várható érték az L^1-konvergencia szerint folytonos, így
$$\begin{aligned} M(t) &= \lim_{s\to\infty} M(t) = \lim_{s\to\infty} \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty} M(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(0 \mid \mathcal{F}_t) = 0 \end{aligned}$$
lenne, ami lehetetlen.

4. Az ellentmondás az egyenletes integrálhatóságra való hivatkozás nélkül is kicsikarható. Ha az M martingál lenne, akkor alkalmazható lenne az energia azonosság. Így minden $t < s$ esetén
$$\|M(s) - M(t)\|^2 = \|M(s)\|^2 - \|M(t)\|^2.$$
Ebből következően az $s \mapsto \|M(s)\|$ monoton növekedő lenne. Mivel korlátos, ezért a végtelenben konvergens lenne. Ebből következően az $L^2(\Omega)$ tér teljessége miatt a $\lim_{s\to\infty} M(s)$ határérték $L^2(\Omega)$-ban is létezne. Mivel a mérték véges, ezért a konvergencia L^1-ben is teljesülne. Mivel minden L^1-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért az $L^1(\Omega)$-ban vett határérték szintén nulla.

□