Example 1 *Normális eloszlás karakterisztikus függvénye Ito-formulával.*

Elegendő kiszámolni az $N(0,1)$ karakterisztikus függvényét. A $z \mapsto \exp(itz)$ kifejezés mint komplexből komplexbe ható leképezés tekinthető $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétszer deriválható függvénynek. Külön alkalmazva a formulát a valós és a komplex részre az Ito-formula alapján

$$\begin{aligned}\exp(itw(s)) - \exp(itw(0)) &= it\int_0^s \exp(itw(u))\,dw(u) + \\ &+\frac{1}{2}(it)^2\int_0^t \exp(itw(u))\,d[w(u)].\end{aligned}$$

A két oldalon várható értéket véve:

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{E}\left(\int_0^s \exp(itw(u))\,du\right).$$

A két integrált felcserélve

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2}t^2\int_0^s \mathbf{E}(\exp(itw(u)))\,du.$$

Deriválva az

$$\frac{d}{ds}\mathbf{E}(\exp(itw(s))) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{E}(\exp(itw(s))).$$

Az egyenletet megoldva

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}s\right).$$

Ha $s = 1$, akkor $w(s)$ eloszlása $N(0,1)$, így

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Ha a komplex számokat el akarjuk kerülni, akkor az Ito-formulát a $w \mapsto \cos tw$ és $w \mapsto \sin tw$ szereposztásokkal kell alkalmazni, majd a két oldal várható értékét venni. Minden esetben ki kell használni, hogy a sztochasztikus integrálok valódi martingálok, ugyanis az integrandusok korlátosak.

$\square$