A Dalang–Morton–Willinger tétel

Medvegyev Péter*†

September 24, 2007

Abstract

A dolgozatban röviden megvizsgáljuk a Dalang–Morton–Willinger tétel bizonyítását és rámutatunk arra, hogy a véges állapottérre, illetve a tetszőleges állapotérre kimondott tételek azonossága a sztochasztikus konvergencia sajátos és némiképpen meglepő tulajdonságai miatt esnek egybe.

In the article we shortly discuss the proof of the theorem of Dalang–Morton–Willinger. We show that the proof of the theorem depends on some interesting general properties of the stochastic convergence.

A matematikai pénzügyek talán legszebb állítása, a Dalang–Morton–Willinger tétel szerint véges és diszkrét időhorizont esetén a nincs arbitrázs tulajdonság szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen ekvivalens martingál mérték. A tétel több szempontból is figyelmreméltó: egyrészt rendkívül elegáns, másrészt végső soron a legáltalánosabb ilyen irányú állítás, ugyanis a tételben szereplő egyetlen lényegi megkötés, a lehetséges időpontok végességének megkötése, nem ejthető el. Ugyancsak érdekes, hogy a tétel születésekor az eredeti bizonyítás meglehetősen bonyolult volt. Jellemző a helyzetre, hogy az egyébként kíváló [5] könyv első kiadása nem adja meg a tétel bizonyítását és a közölt bizonyítás vázlat sok mindennek mondható csak megvilágítónak vagy értelmezhetőnek nem. Hogyan lehet egy ilyen egyszerű és elegáns tételnek ilyen bonyolult bizonyítása? Nem meglepő, hogy evvel a kérdéssel és a tétel bizonyításával, pontosabban annak egyszerűsítésével, a terület legjobbjai foglalkoztak [2], [15]. Számos próbálkozás után az áttörést a [9] dolgozat hozta. A dolgozatban a szerzők egy igen rövid és elegáns bizonyítást adtak a tételre. Ugyanakkor feltehetően „sportot" csináltak abból, hogy a bizonyítást lerövidítsék és a közölt gondolatmenet ennek következtében vázlatos és némiképpen homályos[1]. Ennek következtében például az [6] vagy a [7] számos ponton jelentősen eltér az eredeti gondolatmenettől és megítélésem szerint továbbra is túlbonyolítja a bizonyítást.[2]

*Szeretnék köszönetet mondani Badics Tamásnak, Rásonyi Miklósnak és a dolgozat ismeretlen bírálójának a dolgozat figyelmes elolvasásáért és a segítőkész megjegyzéseikért.

†A dolgozat a Szigmában [13], megjelent dolgozat további finomításait tartalmazza. A javításokat és módosításokat az [3] alapján végeztem.

[1] A [3] a tételt a matematikai pénzügyek 100 méteres síkfutásának nevezi.

[2] A [3] bizonyítása lényegében azonos, mint a [9], de absztraktabb nyelvezettel van elmondva, ugyanakkor a tétel súlyának megfelelően sokal hosszabb.

A Dalang–Morton–Willinger tétel, illetve bizonyításának legfőbb sajátossága, hogy szinte majdnem azonos a jóval egyszerűbb, időnként Harrison–Pliska tételnek is mondott elemi állítás igazolásával, amikor a lehetséges kimenetelek tere véges [8]. A két állítás igazolása közötti eltérés nagyrészt a tételben szereplő feltételekből ered, ugyanis a Dalang–Morton–Willinger tétel indoklásában, az állítás természetéből eredően, néhány elemi mértékelméleti megfontolás nem kerülhető el. A jelen dolgozat fő mondanivalója, hogy a két állítás közötti analógia a véges dimenziós terek és az összes valószínűségi változókat tartalmazó úgynevezett L^0 tér közötti meglepő hasonlóságokra vezethető vissza.

1 A tétel kimondása

Feltesszük, hogy az olvasó ismeri az eszközárazással kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, v.ö. [12], és csak a tétel rövid és vázlatos ismertetésére szorítkozunk. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy általános valószínűségi mező és $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ véges időhorizontú, de minden más szempontból tetszőleges filtráció. Legyen $(S(t))_{t=0}^{T}$ tetszőleges m-dimenziós $\mathcal{F}$-adaptált folyamat. Miként közismert, az adaptáltság csak annyit jelent, hogy minden t-re az $S(t)$ vektor értékű valószínűségi változó $\mathcal{F}_t$-mérhető. Vezessük be az

$$R \mathrel{\hat=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta(t) \right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül, vagyis ahol a $\theta(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. Az R az $S(t)$ árfolyamok megváltozásából származó lehetséges árfolyamnyereségek halmaza. Az analízisben megszokott módon L^0_+ jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be az

$$A \mathrel{\hat=} R - L^0_+,$$

valamint a $\mathrm{cl}(A)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő, és az A definíciójában a kivonás jel a komplexus kivonást jelent. Diszkrét, véges időhorizont esetén az úgynevezett eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő:

Tétel 1 (Dalang–Morton–Willinger) *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \cap L^0_+ = \{0\}$.
2. $A \cap L^0_+ = \{0\}$ *és* $A = \mathrm{cl}(A)$.
3. $\mathrm{cl}(A) \cap L^0_+ = \{0\}$.
4. *Megadható olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az* S m*-dimenziós martingál.*

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T}[S(t)-S(t-1)]\,\theta(t)\geq 0$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva az első állítás szerint nincsen arbitrázs.

2 Az L^0 tér elemi tulajdonságai

Emlékeztetünk, hogy az $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ téren egy adott $\mathcal{F}$ σ-algebrára mérhető valószínűségi változók halmazát értjük. A továbbiakban az $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ paramétert elhagyjuk, és a valamivel egyszerűbb L^0 jelölést fogjuk használni. A valószínűségi változókat a szokásos módon a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint ekvivalencia osztályokba soroljuk. Az L^0 téren a konvergenciát a sztochasztikus konvergencia definiálja. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus konvergencia metrizálható, így az L^0 részhalmazainak zártságát elegendő szekvenciális okoskodással igazolni, vagyis egy $Z\subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden a Z halmazból vett konvergens sorozat határértéke is a Z halmazban van. A sztochasztikus konvergencia alapvetően fontos tulajdonsága, amely a későbbi gondolatmenet alapjául szolgál, hogy minden sztochasztikusan konvergens sorozat tartalmaz egy majdnem mindenhol konvergens részsorozatot, illetve, hogy a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. [11] Ennek megfelelően egy $Z\subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha a Z-ből vett minden majdnem mindenhol konvergens sorozatnak a határértéke is Z-be esik. Másképpen fogalmazva az L^0 térben a zártságot szekvenciális gondolatmenettel tudjuk igazolni, miközben az egyébként nem metrizálható majdnem mindenhol való konvergenciát[3] használjuk. Az L^0 tér számunkra kulcs tulajdonságát a következő kompaktsági lemma tartalmazza: [9]

Lemma 2 *Legyen (η_n) $\mathbb{R}^m$ értékű mérhető függvények sorozata és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az (η_{σ_k}) sorozat minden kimenetelre konvergens. Másrészről, ha $\sup_n\|\eta_n\|=\infty$, akkor van olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre $\lim_{k\to\infty}\|\eta_{\sigma_k}\|=\infty$ minden kimenetelre.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a Bolzano–Weierstrass tétel miatt a kimenetelenkénti korlátosság miatt minden ω esetén triviálisan található olyan $(\sigma_k(\omega))$ szigorúan monoton növekedő sorozat, amelyre az $\left(\eta_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\right)$ sorozat konvergens. A lényeges észrevétel, hogy a σ_k indexsorozat mérhetőnek választható. Legyen először (η_n) skalár értékű sorozat. A feltétel szerint az $\eta_\infty\doteq\liminf_n\eta_n$

[3]Érdemes megjegyezni, bár ennek nincsen jelentőség, hogy a majdnem mindenhol való konvergencia nem is topologizálható.

minden kimenetelre létezik és véges. Az (η_n) mérhetősége miatt az η_∞ is mérhető. Legyen $\sigma_0 \doteq 0$, és vezessük be a

$$\sigma_k \doteq \inf\left\{n > \sigma_{k-1} : |\eta_n - \eta_\infty| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

függvényeket. Elemi megfontolásokkal azonnal belátható, hogy a σ_k minden k-ra mérhető, illetve $\eta_{\sigma_k} \to \eta_\infty$. Következésképpen a lemma állítása ilyenkor teljesül. Többdimenziós esetben először az első koordinátához készítsük el a részsorozatot, majd a már megritkított sororozat második koordinátájához keressük meg a konvergenciát biztosító indexsorozatot. Az eljárást egymás után az összes koordinátákra megismételve a (σ_k) indexsorozatot egyszerű, véges lépésből álló iterációval megkaphatjuk. Az állítás második felének indoklásához elegendő a

$$\sigma_k \doteq \inf\{n > \sigma_{k-1} : \|\eta_n\| \geq k\}$$

sorozatot venni.

□

A lemma közvetlen következménye, hogy a véges számú elem által generált kúpok zártságára vonatkozó közismert tétel átvihető véges dimenziós terekből az $L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ térbe.

Lemma 3 *Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tetszőleges valamely $\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető függvények. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ és tekintsük az*

$$L \doteq \left\{f : f = \sum_{i=1}^{m} f_i\varphi_i, \varphi_i \in L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P})\right\}$$

lineáris teret. Az L az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ zárt altere.

Bizonyítás: Vegyünk egy $l_n \in L$ sorozatot, és tegyük fel, hogy $l_n \to l_\infty$, ahol a konvergencián a majdnem mindenhol való konvergenciát értjük. Az $l_n \in L$ feltételből meg kell mutatnunk, hogy $l_\infty \in L$. Vektor jelölésre áttérve az L definíciója szerint

$$l_n \doteq (g, y_n),$$

ahol $g \doteq (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ és $y_n \doteq \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right)$ valamint minden n-re az y_n $\mathcal{F}$-mérhető. Vegyük észre, hogy a bizonyítás nehézsége pusztán abból áll, hogy az (l_n) konvergenciájából nem következik az (y_n) konvergenciája[4]. Ugyancsak vegyük észre, hogy elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozatnak van az első lemma értelmében konvergens részsorozata, ugyanis ha alkalmas részsorozatra $y_{\sigma_k} \to y_\infty$, akkor az y_∞ $\mathcal{F}$-mérhető, ugyanis a lemma által biztosított (y_{σ_k}) részsorozat tagjai $\mathcal{F}$-mérhetőek, és

$$(g, y_{\sigma_k}) \to (g, y_\infty) = l_\infty.$$

[4]Érdemes hangsúlyozni, hogy pontosan ez a probléma lép fel akkor, amikor a véges dimenziós terekben azt kell igazolni, hogy minden véges kúp, vagy egy altér zárt. Az alábbi bizonyítás ezen az igen fontos állítás bizonyításának közismert ötletére épül.

A konvergens részsorozat létezéséhez elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozat megválasztható úgy, hogy a sorozat majdnem minden kimenetelre pontonként korlátos. Legyen Ω_1 az Ω azon részhalmaza, ahol ez nem teljesül. Mivel (y_k) $\mathcal{F}$-mérhető ezért Ω_1 szintén $\mathcal{F}$-mérhető. A részsorozat megkonstruálásának céljából az Ω_1 halmazon

$$l_n(\omega) = (g(\omega), y_n(\omega))$$

egyenlőséget osszuk végig az $\|y_n(\omega)\|$ sorozattal:

$$\frac{l_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} = \left(g(\omega), \frac{y_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|}\right).$$

Az $(y_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|)$ sorozat korlátos, így az előző lemma szerint van mérhető módon indexelt konvergens részsorozata. Természetesen előfordulhat, hogy a kiválasztott részsorozat bizonyos kimenetelekre korlátos. Ezen kimenetelek halmaza ismételten $\mathcal{F}$-mérhető. Ezeket a kimeneteleket töröljük az Ω_1 halmazból, és térjünk át a lemma második felében szereplő részsorozatra. A megmaradt kimenetelekre $\|y_{\sigma_n}(\omega)\| \to \infty$. Erre a részsorozatra az Ω_1-halmazon áttérve

$$\frac{l_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|} \to 0$$

ugyanis a számláló konvergens a nevező pedig végtelenbe tart. Az $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ halmazon ez azt jelenti, hogy van egy olyan változó, nevezetesen u_∞, amely $\mathcal{F}$-mérhető és amelyre

$$(g(\omega), u_\infty(\omega)) = 0, \quad \omega \in \Omega_1.$$

Az $u_\infty(\omega) \in \mathbb{R}^m$ vektor egységnyi hosszú vektorok határértéke, így nem lehet azonosan nulla egyetlen $\omega \in \Omega_1$ esetén sem. Így minden $\omega \in \Omega_1$-re az

$$g(\omega) \circeq (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_m(\omega))$$

egyik koordinátája, természetesen minden ω-ra más és más, kifejezhető a többi segítségével. A lényeges gondolat az, hogy amikor a g valamelyik koordinátáját az Ω_1-en kifejezzük a többivel a súlyok $\mathcal{F}$-mérhetőek. A kifejtéseket az

$$l_{\sigma_n}(\omega) = (g(\omega), y_{\sigma_n}(\omega))$$

egyenlőségbe visszahelyettesítve feltehető, hogy az Ω_1 halmazon minden ω-ra az $y_{\sigma_n}(\omega)$ súlyok közül csak $m-1$ súly nem nulla, miközben az Ω_1 komplementerén az y_{σ_n} korlátos és az $\omega \mapsto y_{\sigma_n(\omega)}(\omega)$ függvények $\mathcal{F}$-mérhetőek. Ha az így kapott súlyok halmaza még mindig nem korlátos, akkor az eljárást megismételjük. Vagyis létezik egy $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ pozitív mértékű halmaz, amelyhez már van olyan (y_{σ_N}) részsorozat, amely az Ω_2 komplementerén korlátos és amelynek az Ω_2-ön már legfeljebb $m-2$ koordinátája nem nulla. Utolsó lépésként már csak egyetlen koordináta marad, vagyis feltehető például, hogy

$$l_n = f_1 \varphi_1^{(n)}.$$

Ilyenkor a $\varphi_1^{(n)}(\omega)$ csak akkor lehet nem korlátos, ha az $f_1(\omega)$ nulla. Ha Ω_m jelöli azt az $\mathcal{F}$-mérhető halmazt, ahol az $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ nem korlátos, akkor a $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ sorozat helyett a $\left(\varphi_1^{(n)}\chi_{\Omega_m^c}\right)$ sorozatot véve a (y_n) sorozat $\mathcal{F}$-mérhető marad és korlátos lesz. Mivel az eljárás véges lépésben befejeződik, ezért feltehető, hogy az (y_n) sorozat korlátos, amivel az L zártságát igazoltuk.

$\square$

A nincsen arbitrázs feltétel a következő lemmában játszik szerepet:

Lemma 4 *Jelölje $L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$ az előző lemmában szereplő $\mathcal{A}$ σ-algebrán nem negatív változók halmazát. Ha az előző lemmában szereplő L altérre*

$$L\cap L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})=\{0\},$$

akkor az

$$A\doteq L-L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$$

kúp zárt az $L^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$ térben.

Bizonyítás: A lemma bizonyítása az előző lemma bizonyításának értelemszerű módosításával kapható. Az $l_n\doteq(g,y_n)$ egyenlőség helyett az

$$a_n\doteq(g,y_n)-r_n$$

egyenlőségből kell kiindulni, ahol $r_n\geq 0$. A végigosztás, illetve a konvergens részsorozatra való áttérés után az $(r_{\sigma_n}/\left\|y_{\sigma_n}(\omega)\right\|)$ sorozat szükségszerűen konvergens és az Ω előző lemmában szereplő megfelelő Ω_m részhalmazán érvényes az

$$0=(g,y_\infty)-r_\infty,\quad r_\infty\geq 0$$

felbontás, ahol értelemszerűen r_∞ jelöli az $(r_{\sigma_n}/\left\|y_{\sigma_n}(\omega)\right\|)$ sorozat határértékét. Értelemszerűen

$$\left(g,y_\infty\chi_{\Omega_k}\right)=r_\infty\chi_{\Omega_k}.$$

Ebből, felhasználva, hogy az $y_\infty\chi_{\Omega_m}$ változó $\mathcal{F}$-mérhető az $L\cap L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})=\{0\}$ feltétel miatt $r_\infty\chi_{\Omega_m}=0$, amiből az állítás indoklása az előző lemma gondolatmenetét megismételve már evidens.

$\square$

3 A tétel igazolása

A tétel bizonyítása a végtelen dimenziós szeparációs tételre épül. A véges dimenziós esetben, [12], [14] a tétel bizonyításakor elegendő az

$$R\doteq\left\{H:H=\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\right\}$$

és az $\mathbb{R}_+^m$ konvex halmazokat elválasztani. Az általános esetben, a nehézségek abból erednek, hogy két konvex halmaz csak akkor választható el, ha az egyiknek van belső pontja. Az L^1 térben a nem negatív változók halmazának azonban nincsen belső pontja. Ezt orvosolja a következő lemma. V.ö.: [10], [15], [17].

Lemma 5 (Kreps-Yan) *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező. Legyen K a mezőn értelmezett integrálható függvényekből álló $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér olyan zárt, konvex kúpja, amelyre $K \supseteq \left(-L_+^1\right)$ és $K \cap L_+^1 = \{0\}$. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ téren létezik olyan $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amely ekvivalens[5] az eredeti $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékkel, és amelyre*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty,$$

valamint

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega k d\mathbf{Q} = \int_\Omega k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \leq 0, \quad \forall k \in K.$$

Bizonyítás: Az L^1 duálisa L^∞, [11], tehát az L^1 téren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok alkalmas L^∞ függvény segítségével integrálként reprezentálhatóak, vagyis minden az L^1 téren értelmezett z folytonos, lineáris funkcionálnak egyértelműen megfeleltethető egy olyan, szintén z-vel jelölt L^∞-beli elem, amelyre tetszőleges $l \in L^1$ esetén

$$\langle z, l \rangle = \int_\Omega z l d\mathbf{P}.$$

Legyen $\mathcal{Z}$ az olyan z folytonos, lineáris funkcionálok halmaza, amelyekre $\langle z, K \rangle \leq 0$. Mivel $K \supseteq \left(-L_+^1\right)$ ezért $z \geq 0$ majdnem mindenhol. Mivel $0 \in \mathcal{Z}$, ezért $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Jelölje $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ elemeinek tartóhalmazaiból álló halmazt, vagyis $Y \in \mathcal{Y}$, ha van olyan $z \in \mathcal{Z}$, hogy $Y = \{z > 0\}$. Triviálisan az $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható egyesítésre, ugyanis ha $z_n \in \mathcal{Z}$, akkor alkalmas α_n pozitív konstansokkal $\sum_n \alpha_n z_n \in \mathcal{Z}$. Ha

$$\lambda_0 = \sup\{\mathbf{P}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\},$$

akkor van olyan $(Y_n)_n$ sorozat, amelyre $\mathbf{P}(Y_n) \nearrow \lambda_0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az (Y_n) monoton nő, és miként az imént megjegyeztük, $Y_0 \stackrel{\circ}{=} \cup_n Y_n \in \mathcal{Y}$, tehát $\mathbf{P}(Y_0) = \lambda_0$. Az állítást belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\lambda_0 = 1$, ugyanis akkor találtunk egy olyan $z_0 \in \mathcal{Z}$ elemet, vagyis egy olyan $z_0 \in L^\infty$ függvényt, amelyre $\langle z_0, K \rangle \leq 0$, és amelyre $\mathbf{P}(z_0 > 0) = 1$. Ilyenkor a

$$z_0 \stackrel{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$$

választás mellett a lemma állítása teljesül.

[5] Emlékeztetünk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{Q}(A) = 0$, vagyis a nulla valószínűségű események halmaza a két mérték esetében egybeesik. Természetesen a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ekvivalens, ha a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ létezik és pozitív. A $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ mindig normalizálható, vagyis feletehető, hogy a $\mathbf{Q}$ is valószínűségi mérték.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(Y_0) < 1$, és vegyük az $x \doteq \chi_{Y_0^c} \in L^1_+ \setminus \{0\}$ függvényt. Mivel a K zárt, konvex halmaz és a lemma $K \cap L^1_+ = \{0\}$ feltétele miatt $x \notin K$, ezért a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn—Banach-tétel, szerint található az L^1 téren értelmezett olyan z_x folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\langle z_x, x \rangle > \langle z_x, k \rangle, \quad k \in K. \tag{1}$$

A K kúp, így ha $\langle z_x, k \rangle > 0$ valamely $k \in K$ elemre, akkor $\langle z_x, sk \rangle \nearrow \infty$ ha $s \nearrow \infty$, így az (1) szeparációs egyenlőtlenség nem teljesülhet. Ebből következően

$$\langle z_x, k \rangle \leq 0, \quad k \in K.$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_B \in L^1_+$, ezért $z_x \geq 0$, ugyanis ha egy pozitív mértékű B halmazon $z_x < 0$, akkor a $-s\chi_B \in -L^1_+ \subseteq K$ halmazon

$$\langle z_x, -s\chi_B \rangle = -s \int_B z_x d\mathbf{P} > 0,$$

ami az s növelésével ismét tetszőlegesen naggyá tehető. Következésképpen az (1) szeparációs egyenlőtlenség ismét nem teljesülhetne. Mivel $0 \in K$, ezért $\langle z_x, x \rangle > 0$, vagyis $\int_\Omega z_x x d\mathbf{P} > 0$, tehát a z_x tartója egy pozitív mértékű halmazon belemetsz az $x \doteq \chi_{Y_0^c}$ tartójába, vagyis a z_x az Y_0^c halmaz egy pozitív valószínűségű részhalmazán pozitív. Ebből következően egyrészt

$$\langle z_0 + z_x, K \rangle = \langle z_0, K \rangle + \langle z_x, K \rangle \leq 0$$

másrészt $z_0 + z_x \geq 0$ és a $z_0 + z_x$ tartója nagyobb mint Y_0, ami ellentmond a $\mathbf{P}(Y_0)$ maximalitásának.

□

Végezetül rátérhetünk a tétel bizonyítására. V.ö.: [9]

1. Meg kell mutatni, hogy a megadott feltételek teljesülése esetén az $A \doteq R - L^0_+$ halmaz zárt[6]. A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül. Ha $T = 1$, akkor a Lemma 4 szerint az A halmaz zárt. Tegyük fel, hogy az állítást már $T - 1$ időpont esetén beláttuk, és legyen

$$a_n \doteq \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta_n(t) - r_n \to a_\infty.$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} b_n &\doteq [S(1) - S(0)]\, \theta_n(1) \\ c_n &\doteq a_n - b_n \end{aligned}$$

jelöléseket. Vegyük észre, hogy a problémát az jelenti, hogy abból, hogy az (a_n) konvergens még nem következik, hogy a (b_n) és a (c_n) is konvergens.

[6] A sztochasztikus, illetve a majdnem mindenhol való konvergenciában.

Ha a $(\theta_n(1))$ sorozat korlátos, akkor részsorozatra áttérve feltehető, hogy a $(\theta_n(1))$ konvergens. A részsorozatot megadó indexek $\mathcal{F}_0$-mérhetőek, így a többi $(\theta_n(t))_{t=2}^T$ stratégia a részsorozatra való áttérés után is mérhető marad a saját σ-algebrájára nézve, vagyis a megritkított $(\theta_n(t))_{t=1}^T$ stratégia is előrejelezhető marad. Ha a $(\theta_n(1))$ nem korlátos, akkor a már bemutatott módon eljárva és a

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{\|\theta_n(1)\|} &\circeq [S(1)-S(0)]\frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|}= \\ &= \frac{a_n}{\|\theta_n(1)\|}-\left(\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)]\frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|}-\frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|}\right)\end{aligned}$$

egyenlőségben határértéket véve feltehetjük, hogy a

$$\left(\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)]\frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|}-\frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|}\right)$$

sorozat konvergens. Az indukciós feltétel miatt, vagyis felhasználva, hogy $T-1$ időszak esetén az A halmaza zárt, a határérték előállítható

$$\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)]\theta^*(t)-r^*$$

módon, ahol természetesen a $(\theta^*(t))_{t=2}^T$ előrejelezhető. Következésképpen

$$[S(1)-S(0)]\theta^*(1)+\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)]\theta^*(t)-r^*=0.$$

A nincs arbitrázs feltétel miatt $r^*=0$. Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_1$-mérhető halmazon $[S(1)-S(0)]\theta_1^*>0$, akkor az

$$[S(1)-S(0)]\theta_1^*\chi_H=\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)](-\theta^*(t))\chi_H$$

egy arbitrázs stratégiát realizál, ami lehetetlen. Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_1$-mérhető halmazon $[S(1)-S(0)]\theta_1^*<0$, akkor pedig az

$$\sum_{t=2}^T [S(t)-S(t-1)]\theta_t^*\chi_H$$

realizál arbitrázs stratégiát. Ebből következően majdnem mindenhol

$$[S(1)-S(0)]\theta_1^*=0.$$

A már bemutatott módon az "effektív" koordinátákat csökkentve véges eliminációs lépés után feltehetjük, hogy a $(\theta_n(1))$ korlátos. Ebből következően alkalmas részsorozatra áttérve a (b_n) és a (c_n) sorozatok konvergensek, és az indukciós feltétel szerint a határértékük a megfelelő kúpban helyezkedik el.

2. A második állításból triviálisan következik a harmadik.

3. Megjegyezzük, hogy tetszőleges η változó esetén a $\mathbf{P}$ valószínűségi mező megválasztható úgy, hogy az η integrálható lesz. Elég például a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \mathrel{\hat=} C \int_A \exp\left(-\|\eta\|\right) d\mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$-vel ekvivalens teret venni[7]. Mivel a tételben szereplő állítások érvényben maradnak, ha ekvivalens valószínűségre térünk át[8], ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S folyamat minden időszakban integrálható. Mivel az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $K \mathrel{\hat=} \mathrm{cl}(A) \cap L^1$ kúp zárt az L^1 térben, és a feltétel szerint $K \cap L^1_+ = \{0\}$. Az előző lemmában szereplő szeparációs tétel alapján van olyan $\mathbf{Q}$ ekvivalens mérték, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$, és amelyre

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \le 0, \quad k \in K.$$

Speciálisan, ha vesszük a $k \mathrel{\hat=} \pm\left[S(t) - S(t-1)\right]\theta(t)$ elemeket, ahol a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető, akkor

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(t) - S(t-1)\right]\theta(t)\right) = 0.$$

Ha $\theta(t) \mathrel{\hat=} \chi_F$ ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor a feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(S(t) - S(t-1) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0,$$

vagyis az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt következésképpen a harmadik állításból következik a negyedik.

4. Végezetül tegyük fel, hogy teljesül a negyedik állítás, vagyis van olyan $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mérték, amely mellett az S martingál. Ha $h \in A \cap L^0_+$, akkor van olyan θ előrejelezhető startégia, amelyre

$$0 \le h \le \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1)\right]\theta(t). \tag{2}$$

Elegendő megmutatnunk, hogy

$$0 \le \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \le \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1)\right]\theta(t)\right) = 0.$$

[7] Az $x\exp(-|x|)$ függvény korlátos, vagyis integrálható, az áttérést biztosító $\exp(-\|\eta\|)$ Radon–Nikodym-derivált korlátos.

[8] A sztochasztikusan konvergens sorozatok pontosan azok a sorozatok, amelyek bármely részsorozata rendelkezik, ugyan ahhoz a változóhoz konvergáló, majdnem mindenhol konvergens részsorozattal. Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol konvergens sorozatok halmaza nyilván azonos.

Amiből a $h \geq 0$ felhasználásával a h $\mathbf{Q}$-majdnem minden kimenetelre nulla. Mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, ezért a h $\mathbf{P}$-majdnem mindenhol nulla, így teljesül az első állítás.

A bizonyításban némi technikai bonyodalmat jelent, hogy a $\theta(t)$ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, így a feltételes várható értékben a kiemelési szabály közvetlenül nem használható, sőt még azt sem tudjuk, hogy az egyes

$$[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)$$

szorzatok integrálhatóak, így azt sem tudjuk, hogy az összeg integrálja vehető-e tagonként vagy sem. Ugyanakkor, v.ö. [5], [6], ez a következő gondolatmentettel orvosolható: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A (2) sort szorozzuk be $\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$-nel. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyenek h és θ a már beszorzott kifejezések. Így feltehető, hogy a $\theta(1)$ korlátos. Tetszőleges n-re a $\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$ függvény $\mathcal{F}_0$-mérhető, így az új θ stratégia előrejelezhető marad. Az S $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonsága szerint

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(1) - S(0)] \cdot \theta(1)) = \\ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(1) - S(0)] \cdot \theta(1) \mid \mathcal{F}_0)\right) = \\ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(1) - S(0)] \mid \mathcal{F}_0) \cdot \theta(1)\right) = \\ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(0 \cdot \theta(1)) = 0.\end{gathered}$$

Vegyük észre, hogy a kiemelési szabályt azért használhattuk, mert a $\theta(1)$ függvény az előrejelezhetőség miatt $\mathcal{F}_0$-mérhető és természetesen korlátos. [11] Ebből következően az $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}$ szerinti várható értékben az összeg szétszedhető és

$$\begin{gathered}0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \\ \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(1) - S(0)]\,\theta(1)) + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right)\end{gathered}$$

ahol az első várható érték nulla. Tekintsük tehát az

$$0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right)$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk be a (2) sort most $\chi(\|\theta(2)\| \leq n)$-nel. A majorált konvergencia tétel miatt van olyan n, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{M^Q}(h\chi(\|\theta(2)\| \leq n)) &\leq \mathbf{M^Q}([S(1) - S(0)]\,\theta(1)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)) + \\
&+\mathbf{M^Q}\left(\sum_{t=2}^{T}[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)\right) < \\
&< \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M^Q}\left(\sum_{t=2}^{T}[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M^Q}([S(2) - S(1)]\,\theta(2)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)) + \\
&+\mathbf{M^Q}\left(\sum_{t=3}^{T}[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M^Q}\left(\sum_{t=3}^{T}[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi(\|\theta(2)\| \leq n)\right).
\end{aligned}$$

Az eljárást folytatva megmutatható, hogy alkalmas n-re

$$\mathbf{M^Q}\left(h\prod_{t=1}^{T}\chi(\|\theta(t)\| \leq n)\right) \leq \varepsilon.$$

A monoton konvergencia tétel miatt

$$\mathbf{M^Q}(h) \leq \varepsilon,$$

amiből $\mathbf{M^Q}(h) = 0$.

□

4 Néhány megjegyzés

Befejezésként érdemes néhány megjegyzést tenni.

1. A bizonyítás a T szerinti indukcióra épül. Az indukciós lépésben az A halmaz zártságát igazoltuk. Ugyanakkor ebben a lépésben ismét a kompaktsági lemmát használtuk, és esetlegesen úgy érezhetjük, hogy erre nincsen szükség. Ha csak az ekvivalens martingálmérték létezését akarjuk igazolni, és nem akarjuk igazolni az A vagy az R halmaz zártságát, ez a lépés valóban el is hagyható. Mivel $T = 1$ esetén a zártságot tudjuk, az ekvivalens martingálmérték létezése a bemutatott módon a $T = 1$ esetben indokolható. Tegyük fel, hogy az állítást $T - 1$ esetén igazoltuk. Világos, az eredeti modellre feltett nincsen arbitrázs feltételből következik a nincsen arbitrázs feltétel az időtartomány tetszőleges részintervallumára is igaz, így a $t = 0, 1$ és a $t = 1, \ldots, T$ időperiódusokra is. Jelölje $\mathbf{Q}_1$ a $t = 0, 1$ időszakra kapott martingálmértéket és legyen $\mathbf{Q}_2$.a $t =$

$1,\ldots,T$ időszakra kapott martingálmérték[9]. .Mivel $T=1$ esetén az állítást már igazoltuk, valamint az indukciós feltétel miatt a $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ mértékek léteznek. Természetesen az állítást alkalmazhajuk a $(\Omega,\mathcal{F}_1,\mathbf{Q}_2)$ mértéktérre, így a

$$\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}$$

derivált korlátos. A $\mathbf{Q}$ mérték deriváltját definiáljuk a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \overset{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}}$$

szorzattal. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2.$$

Mivel a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ triviálisan pozitív és korlátos, ezért elegendő azt megmutatni, hogy a $\mathbf{Q}$ valóban martingálmérték a teljes $t=0,1,\ldots,T$ időtartományon. Mutassuk, meg, hogy az $S(t)$.változók integrálhatóak $\mathbf{Q}$ szerint. Ha $t=0$, akkor

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S(0)\,d\mathbf{Q} &\overset{\circ}{=} \int_\Omega S(0)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_\Omega S(0)\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_\Omega \left(S(0)\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\right)\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_\Omega S(0)\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_\Omega S(0)\,d\mathbf{Q}_1 < \infty,
\end{aligned}$$

ugyanis a $\mathbf{Q}_1$ éppen az $S(0), S(1)$ martingálmértéke. Hasonló gondolatmenet alkalmazható ha $t=1$. Ha $t>1$, akkor

$$\int_\Omega S(t)\,d\mathbf{Q} = \int_\Omega S(0)\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 < \infty$$

ugyanis az $S(t)$ integrálható a $\mathbf{Q}_2$ szerint, hiszen martingálmérték, a $\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}$ derivált pedig korlátos. Legyen most $F \in \mathcal{F}_0$, ekkor az imént már látott módon

[9] Az időszak $T-1$ kereskedési periódust tartalmaz.

számolva, felhasználva, hogy a $\mathbf{Q}_1$ martingálmérték a $t = 0, 1$ időtartományon

$$\begin{aligned}
\int_F S(1)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(1) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \circeq \int_F \left(S(1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \right) \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_F S(1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(1)\, d\mathbf{Q}_1 = \int_F S(0)\, d\mathbf{Q}_1 = \\
&= \int_F S(0) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(0) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_F S(0)\, d\mathbf{Q},
\end{aligned}$$

vagyis

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(S(1) \mid \mathcal{F}_0 \right) = S(0).$$

Legyen most $t \geq 1$. A $\frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}$ korlátos és $\mathcal{F}_1$-mérhető, így $\mathcal{F}_t$-mérhető, ugyanis $t \geq 1$, így ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor, a korlátosság alapján használva a kiemelési szabályt

$$\begin{aligned}
\int_F S(t)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(t) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F \mathbf{M}^{\mathbf{Q}_2} \left(S(t) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mid \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}_2} \left(S(t) \mid \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} S(t+1)\, d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(t+1)\, d\mathbf{Q},
\end{aligned}$$

következésképpen az $(S(t))_{t=0}^{T}$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

2. Az A zártsága, szemben az R-rel, a nincsen arbitrázs feltétel nélkül nem igaz. Az ellenpélda a következő. Legyen $T \circeq 1$, $\Omega \circeq [0,1]$, $\mathcal{F}_0$ legyen a triviális σ-algebra $\mathcal{F}_1$ legyen a Borel-mérhető halmazok σ-algebrája, $S(0) \circeq 0$, $S(1,\omega) \circeq \omega$. Legyen

$$f_n(\omega) \circeq \begin{cases} n\omega & \text{ha} \quad \omega \leq 1/n \\ 1 & \text{ha} \quad \omega \geq 1/n \end{cases}.$$

Triviálisan

$$f_n \leq n \left(S(1) - S(0) \right) \in R,$$

vagyis $f_n \in A$. Nyilván $f_n \to 1$. Ugyanakkor $f \notin A$, ugyanis mivel $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra, ezért az $\mathcal{F}_0$-mérhető függvények konstansok, így minden $f \in A$ esetén van olyan m, hogy minden ω-ra

$$f \leq m \left(S(1) - S(0) \right) = m\omega,$$

ami az $f = 1$ esetén nem teljesülhet. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy az R halmaz zártságához a nincsen arbitrázs feltétel nem szükséges.

References

[1] Dalang, R.C, Morton, A., Willinger W., „Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model.", Stochastics and Stochastic Reports, 29, 1990, 185-201 oldal

[2] Delbaen, F., „The Dalang–Morton–Willinger theorem", kézirat, lásd, www.math.ethz.ch/~delbaen

[3] Dealbean, F. Schachermayer, ‚The Theory of Arbitrage", Springer, 2006

[4] Duffie, D., „Security Markets, Stochastic Models", Academic Press, San Diego, 1988.

[5] Elliott, R J., Kopp, P E., „Pénzpiacok matematikája", Typotex kiadó, Budapest 2000

[6] Elliott, R.J., Kopp, P. E., „Mathematics of Financial Markets", Springer, New York 2004

[7] Föllmer, H., Schied, A., „Stochastic Finance", de Gruyter, Berlin, 2002

[8] Harrison, J.M. , Pliska, S. R., „Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous time trading", Stochastic Processes and their Applications, 11, 1981, 215-260 oldal

[9] Kabanov, Yu., Stricker, C., „A teachers' note on no-arbitrage criteria", Lecture Notes in Mathematics, 1775, 2001, 149-152 oldal

[10] Kreps, D. M., „Arbitrage in securities markets with infinitely many commodities". Journal of Math. Economics, 8, 1981,15-35 oldal

[11] Medvegyev Péter, „Valószínűségszámítás", Aula, Budapest, 2002

[12] Medvegyev Péter, „A pénzügyi eszközök árazásának alaptétel diszkrét idejű modellekben",.Közgazdasági Szemle XLIX, 2002, 574-597 oldal

[13] Medvegyev Péter, „A Dalang-Morton-Willinger tétel", Szigma, 2006, 1-2, 73-85. oldal

[14] Ross, S., „An Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics", Cambridge University Press, 1999.

[15] Schachermayer, W., „A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time", Insurance: Math Econ, 11, 1992, 1-9.oldal

[16] Shiryaev, A.N., „Essentials of Stochastic Mathematical Finance", World Scientific, 1999.

[17] Yan, J. A., „Caracterisation d'une classe d'ensembles convexes de L1 ou H1", Seminaire de Probabilites XIV, Lecture Notes in Mathematics 784, 1980,220-222 oldal