Az eszközárazás második alaptétele

Medvegyev Péter

October 4, 2006

Abstract

A dolgozatban rövid bizonyítást adunk az eszközárazás második alaptételére. A bizonyítás során felhasználjuk a Dalang–Morton–Wilinger tétel bizonyításában használt állításokat

Ebben a megjegyzésben az eszközárazás második alaptételét igazoljuk. Az állítás mögötti pénzügyi-matematikai modell megegyezik a Dalang–Morton–Willinger tételben szereplő modellel. Hangsúlyozni kell, hogy a modellben $T < \infty$ számú diszkrét időperiódus és minden időperiódusban m számú eszköz áll rendelkezésre. Ugyanakkor az állapottér tetszőleges valószínűségi mező lehet. Az állítás bizonyításához három egymásra épülő lemmára van szükségünk. Ezek mindegyike felhasználásra került a Dalang–Morton–Willinger tétel igazolása során.

Lemma 1 (Kabanov–Stricker) *Legyen* (η_n) $\mathbb{R}^m$ *értékű mérhető függvények sorozata és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan* (σ_k) *egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az* $\left(\eta_{\sigma_k}\right)$ *sorozat minden kimenetelre konvergens.*

A második állítás közvetlenül következik az előzőből és a lehetséges pozíciók alterének zártságát állítja.

Lemma 2 *Legyenek* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *tetszőleges valamely* $\mathcal{A}$ σ*-algebra szerint mérhető függvények. Tegyük fel, hogy* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *és tekintsük az*

$$L \doteq \left\{ f : f = \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i, \varphi_i \in L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P}) \right\}$$

lineáris teret ahol a (φ_i) *függvények* $\mathcal{F}$*-mérhetőek. Ha valamely* $\left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right)_n$ *sorozatra az*

$$f_n \doteq \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i^{(n)} \in L$$

sorozat konvergens az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *térben, akkor megadható olyan* (σ_k) *egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, illetve* $\left(\theta_i^{(n)}\right)$ $\mathcal{F}$*-mérhető stratégiák, amelyek*

1. *kimenetelenként korlátosak,*
2. $f_{\sigma_n} \circeq \sum_{i=1}^{m} f_i \theta_i^{(\sigma_n)}$ *és,*
3. *az* $\left(\theta_i^{(\sigma_n)}\right)$ *sorozat majdnem minden kimenetelre konvergens.*

Lemma 3 *Ha nincsen arbitrázs, akkor a*

$$\begin{aligned} K &\circeq \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta(t) \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} \left[S_i(t) - S_i(t-1) \right] \theta_i(t) \right\} \end{aligned}$$

altér zárt az L^0 *térben.*

Bizonyítás: A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül.

1. Ha $T = 1$, akkor az előző szerint a K halmaz zárt, ugyanis ha $f_n \to f_\infty$ az L^0 térben, akkor a lemma szerint $f_{\sigma_n} \to f_\infty$ majdnem mindenhol, következésképpen L^0-ban is. De mivel a $\left(\theta_i^{(\sigma_n)}\right)$ függvények mindegyike $\mathcal{F}$-mérhető ezért a határértékük is $\mathcal{F}$-mérhető, ezért $f_\infty \in L$.

2. Tegyük fel, hogy az állítást már $T-1$ időpont esetén beláttuk, és legyen

$$a_n \circeq \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta_n(t) \to a_\infty.$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} b_n &\circeq \left[S(1) - S(0) \right] \theta_n(1) \\ c_n &\circeq a_n - b_n \end{aligned}$$

jelöléseket. Vegyük észre, hogy a problémát az jelenti, hogy abból, hogy az (a_n) konvergens még nem következik, hogy a (b_n) és a (c_n) is konvergens. Ha a $(\theta_n(1))$ sorozat korlátos, akkor részsorozatra áttérve feltehető, hogy a $(\theta_n(1))$ konvergens. A részsorozatot megadó indexek $\mathcal{F}_0$-mérhetőek, így a többi $(\theta_n(t))_{t=2}^{T}$ stratégia a részsorozatra való áttérés után is mérhető marad a saját σ-algebrájára nézve, vagyis a megritkított $(\theta_n(t))_{t=1}^{T}$ stratégia is előrejelezhető marad. Ha a $(\theta_n(1))$ valamely $F \in \mathcal{F}_0$ halmazon nem korlátos, akkor van olyan részsorozata, amelyre

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{\|\theta_n(1)\|} &\circeq \left[S(1) - S(0) \right] \frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|} = \\ &= \frac{a_n}{\|\theta_n(1)\|} - \sum_{t=2}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|} \end{aligned}$$

egyenlőségben határértéket véve feltehetjük, hogy a

$$\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)] \frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|}$$

sorozat konvergens. Az indukciós feltétel miatt a határérték előállítható

$$\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)] \theta^*(t)$$

módon, ahol természetesen a $(\theta^*(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető. Következésképpen

$$[S(1) - S(0)] \theta^*(1) + \sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)] \theta^*(t) = 0.$$

Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_0$-mérhető halmazon $[S(1) - S(0)] \theta_1^* > 0$, akkor az

$$[S(1) - S(0)] \theta_1^* \chi_H$$

egy arbitrázs stratégiát realizál, ami lehetetlen. Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_0$-mérhető halmazon $[S(1) - S(0)] \theta_1^* < 0$, akkor pedig az

$$\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)] \theta_t^* \chi_H$$

realizál arbitrázs stratégiát. Ebből következően majdnem mindenhol

$$[S(1) - S(0)] \theta_1^* = 0.$$

A már bemutatott módon az "effektív" koordinátákat csökkentve véges eliminációs lépés után feltehetjük, hogy a $(\theta_n(1))$ korlátos. Ebből következően alkalmas részsorozatra áttérve a (b_n) és a (c_n) sorozatok konvergensek, és az indukciós feltétel szerint a határértékük a megfelelő kúpban helyezkedik el.

$\square$

Definition 4 *Azt mondjuk, hogy az $(S_k)_{k=1}^{m}$ eszközök által definiált piac teljes, ha tetszőleges H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változóhoz található olyan*

$$(\varphi_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 0, \ldots, T$$

előrejelezhető stratégia és λ valós szám, hogy

$$H_T = V((T, \theta, \lambda)) \doteq \lambda + \sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1)) \varphi(t),$$

ahol az összeg mögötti

$$(S(t) - S(t-1)) \varphi(t)$$

szorzás skaláris szorzást jelöl.

Ezt követően térjünk rá az eszközárazás második alaptételére.

Theorem 5 (Az eszközárazás második alaptétele) *Tegyük fel, hogy az*

$$(S_i(t))_{i=1}^m, \quad t = 0, \ldots, T$$

eszközök által definiált piacon nincsen arbitrázs. A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték az $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ *téren egyértelmű.*

Bizonyítás: Az állítás bizonyítása két részből áll.

1. Tegyük fel, hogy a piac teljes és legyenek $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ két különböző martingálmérték. Mivel a két mérték különböző ezért van olyan $F \in \mathcal{F}_T$, hogy $\mathbf{Q}(F) \neq \mathbf{R}(F)$. A teljesség miatt van olyan $(\varphi(t))_{t=1}^T$ előrejelezhető stratégia, hogy

$$\chi_F = \lambda + \sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\, \varphi(t). \tag{1}$$

A bizonyítás alapgondolata, hogy mind a két oldalon alkalmazzuk a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mértékek szerinti várható érték operátorokat. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{P}$ martingálmérték esetén

$$\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\, \varphi(t)\right) = 0,$$

amiből

$$\mathbf{Q}(F) = \lambda = \mathbf{R}(F)$$

ami lehetetlen. Természetesen gondot jelent, hogy mivel a φ stratégiák nem feltétlenül korlátosak ezért sem a kiemelési szabályt sem az integrál additivitását nem tudjuk közvetlenül használni. A probléma megkerülése céljából hasonlóan járunk el mint az első alaptétel igazolásakor. Az (1) miatt a teljes összeg integrálható. Ha az (1) sort megszorozzuk a

$$\chi(|\varphi(1)| \leq n_1)$$

$\mathcal{F}_0$-mérhető függvénnyel, akkor az

$$(S(1) - S(0))\, \varphi(1)\, \chi(|\varphi(1)| \leq n_1)$$

kifejezés integrálható, ugyanis a martingálmérték definíciója miatt az $S(1) - S(0)$ integrálható, az $\varphi(1)\, \chi(|\varphi(1)| \leq n_1)$ pedig korlátos. Ebből következően a várható érték az integrálható függvényekre vonatkozó additivitás miatt szétszedhető:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\, \varphi(t)\, \chi(|\varphi(1)| \leq n_1)\right) &= \\
= \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left((S(1) - S(1))\, \varphi(1)\, \chi(|\varphi(1)| \leq n_1)\right) &+ \\
+ \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=2}^{T} (S(t) - S(t-1))\, \varphi(t)\, \chi(|\varphi(1)| \leq n_1)\right)&.
\end{aligned}$$

A kiemelési és a torony szabályok miatt

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(S\left(1\right)-S\left(1\right)\right)\varphi\left(1\right)\chi\left(\left|\varphi\left(1\right)\right|\leq n_1\right)\right)=\\=\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(S\left(1\right)-S\left(1\right)\right)\varphi\left(1\right)\chi\left(\left|\varphi\left(1\right)\right|\leq n_1\right)\mid\mathcal{F}_0\right)\right)=\\=\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(S\left(1\right)-S\left(1\right)\right)\mid\mathcal{F}_0\right)\varphi\left(1\right)\chi\left(\left|\varphi\left(1\right)\right|\leq n_1\right)\right)=\\=\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(0\cdot\varphi\left(1\right)\chi\left(\left|\varphi\left(1\right)\right|\leq n_1\right)\right)=0,\end{gathered}$$

ahol persze felhasználtuk, hogy a $\mathbf{P}$ martingálmérték. Ezt követően szorozzuk be az egyenletet még a $\chi\left(\left|\varphi\left(2\right)\right|\leq n_2\right)$ függvénnyel is. Ekkor a második tag is leválasztható. Ugyanakkor persze a már leválasztott első tag integrálja nem marad nulla, de a majorált konvergencia tétel miatt az n_2 növelésével az értéke tetszőlegesen kicsivé tehető. Az eljárást folytatva tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz megadhatóak $\left(n_t\right)_{t=1}^{T}$ indexek, hogy

$$\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right)\varphi\left(t\right)\right)\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)<\varepsilon.$$

Az (1) egyenletet beszorozva és várható értéket véve

$$\begin{gathered}\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\chi_F\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)=\lambda\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)+\\+\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right)\varphi\left(t\right)\right)\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)\end{gathered}\tag{2}$$

Az $\left(n_t\right)_{t=1}^{T}$ indexeket elég nagynak választva feltehető, hogy

$$\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T}\left\{\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right\}\right)\geq 1-\varepsilon.$$

Ebből a (2) egyenletet felhasználva

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{P}\left(F\right)-\lambda\right|\leq\left|\mathbf{P}\left(F\right)-\mathbf{P}\left(F\cap\bigcap_{t=1}^{T}\left\{\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right\}\right)\right|+\\+\left|\lambda\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T}\left\{\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right\}\right)-\lambda\right|+\\+\left|\mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right)\varphi\left(t\right)\right)\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left|\varphi\left(t\right)\right|\leq n_t\right)\right)\right|\leq\\\leq 3\varepsilon.\end{gathered}$$

Mivel az ε tetszőleges, ezért $\mathbf{P}\left(F\right)=\lambda$, amivel az állítás első felét igazoltuk.

2. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. A feltétel szerint a piacon nincsen arbitrázs, így van olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely mellett az S folyamat minden koordinátája martingál. Definíció szerint legyen

$$\begin{aligned} L &\stackrel{\circ}{=} \{V(T,\theta,\lambda)\} \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \left\{\lambda + \sum_{t=1}^{T}(S(t)-S(t-1))\varphi(t)\right\}, \end{aligned}$$

ahol θ tetszőleges előrejelezhető portfólió és λ tetszőleges valós szám. Mivel a piac nem teljes, ezért $L \neq L^0(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$. Legyen H_T egy olyan követelés, amely nem állítható elő. Miként láttuk a valószínűségi mérték mindig kicserélhető úgy, hogy bármely véges számú változó integrálható legyen és az arbitrázs hiánya miatt létező martingál mérték Radon–Nikodym deriváltja választható korlátosnak, így feltehető, hogy nem csak az $(S(t))_{t=1}^{T}$ oszlopai, hanem a H_T is integrálható. Megmutatjuk, hogy az L zárt az $L^1(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$ térben. Emlékeztetünk, hogy a K az L^0 egy zárt altere. A Markov-egyenlőtlenség miatt az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így a $K\cap L^1$ zárt altér az L^1-ben. Valószínűségi mértékekről lévén szó $1\in L^1$, így ha az egyszerűség kedvéért továbbra is L jelöli az L és az L^1 metszetét, akkor az L felírható mint egy zárt K altér és egy egy-dimenziós altér összege. Ha $1\in K$, akkor készen vagyunk, az L zárt. Ha $1\notin K$, akkor minden $l\in L$ felírható $l=\lambda 1+k$ alakban. Ha $l_n\to l_\infty$ az L altérben, akkor egyedül az okozza a problémát, hogy nem tudjuk, hogy az (l_n)-hez tartozó (λ_n) sorozat korlátos, vagy sem. Legyen d a K és az 1 távolsága. Mivel a K zárt és $1\notin K$, ezért $d>0$. Az (l_n) sorozat konvergens, így korlátos is. Legyen c az (l_n) sorozat korlátja. Mivel a K altér, ezért ha $k_n\in K$, akkor

$$\left(-\frac{k_n}{\lambda_n}\right)\in K$$

így

$$c\geq|\lambda_n 1+k_n|=|\lambda_n|\left|1+\frac{k_n}{\lambda_n}\right|=|\lambda_n|\left|1-\left(-\frac{k_n}{\lambda_n}\right)\right|\geq|\lambda_n|\,d,$$

amiből felhasználva, hogy $d>0$

$$\frac{c}{d}\geq|\lambda_n|,$$

vagyis a (λ_n) sorozat korlátos. Ezért a (λ_n) számsorozatnak van konvergens részsorozata. Erre áttérve feltehető hogy a $(\lambda_n 1)$ sorozat konvergens. Mivel az összeg konvergens, ezért a (k_n) sorozat is konvergens. Mivel a K zárt ezért a (k_n) határértéke a K-ban van, és így a (λ_n+k_n) egy részsorozatának határértéke az L-ben van. Következésképpen a (λ_n+k_n) határértéke is L-ben van.

Mivel a H_T szintén integrálható, ezért van olyan eleme az L^1 térnek, amely nincsen benne az L zárt altérnek. A Hahn–Banach tétel miatt van olyan $z\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$, amely elválasztja az L alteret és a H_T változót. Mivel az L altér, ezért az elválasztó síkot megadó $z\in L^\infty$ függvényre

$$\langle z, l \rangle \overset{\circ}{=} \int_{\Omega} z l d\mathbf{Q} = 0, \quad l \in L.$$

Mivel a $\varphi(t) = 0$ és $\lambda = 1$ egy lehetséges stratégia, ezért

$$\langle z, 1 \rangle \overset{\circ}{=} \int_{\Omega} z 1 d\mathbf{Q} = \int_{\Omega} z d\mathbf{Q} = 0.$$

Legyen

$$r \overset{\circ}{=} 1 + \frac{z}{2 \|z\|_{\infty}} > 0,$$

és definiáljuk az

$$\mathbf{R}(A) \overset{\circ}{=} \int_{A} r(\omega)\, d\mathbf{Q}(\omega)$$

mértéket. Világos, hogy $r > 0$, és

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(z)}{2 \|z\|_{\infty}} = 1,$$

tehát az $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték. Mivel tetszőleges θ előrejelezhető folyamatra a $\lambda = 0$ mellett

$$\sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta(t) \in L,$$

ezért ha a θ korlátos, akkor

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta(t) \right) \overset{\circ}{=} \\
= \; & \mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\, \theta(t) \left(1 + \frac{z}{2 \|z\|_{\infty}} \right) \right) = \\
= \; & \mathbf{M}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - \overline{S}(t-1) \right] \theta(t) \right).
\end{aligned}$$

Mivel az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, és a θ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés, tetszőleges korlátos θ esetén nulla, ezért a bal oldal is nulla. Ha a θ azonosan nulla kivéve a $t-1$ időpontban, ahol az értéke χ_F, ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}} \left(\left[S(t) - \overline{S}(t-1) \right] \chi_F \right) = 0,$$

ami nem más mint

$$\int_{F} S(t)\, d\mathbf{R} = \int_{F} S(t-1)\, d\mathbf{R},$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}} \left(S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right) = S(t-1).$$

Tehát az S folyamat az $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ mérték esetén martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű. A bizonyítás kapcsán érdemes megjegyezni, hogy a $d\mathbf{R}/d\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym derivált korlátos, így az $S(t)$ változók az $\mathbf{R}$ alatt integrálhatók maradnak.

$\square$