0.1 Állítás.
Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty, \quad \liminf_{t\to\infty} w(t) = -\infty.$$

Bizonyítás: Az első állítást igazoljuk. A $t \mapsto w(t+s) - w(s)$ minden s-re szintén Wiener-folyamat, így elegendő belátni, hogy

$$\eta \mathrel{\hat{=}} \sup_{t\geq 0} w(t) \overset{a.s.}{=} \infty \tag{1}$$

minden w Wiener-folyamat esetén. Legyen tehát w egy Wiener-folyamat. A Wiener-folyamat definíciójából világos, hogy ha $c \neq 0$, akkor $w_c \mathrel{\hat{=}} cw\left(t/c^2\right)$ szintén Wiener-folyamat. Mivel a w folytonos elegendő az (1) sorban a suprémumot a racionális időpontokban venni, így az η valószínűségi változó. Evidens módon

$$\sup_t w_c(t) \mathrel{\hat{=}} \sup_t c \cdot w\left(\frac{t}{c^2}\right) = c \cdot \eta.$$

Valamely folyamat szuprémumának eloszlása csak a folyamat végtelen dimenziós eloszlásától függ. Ebből következően az η és a $c \cdot \eta$ eloszlás azonos, ugyanis mind a kettő egy Wiener-folyamat szupréma. Ebből következően az η majdnem minden kimenetlre vagy nulla vagy végtelen. A $w(t+1) - w(1)$ szintén Wiener-folyamat, következésképen a $\sup_{t\geq 1}(w(t) - w(1))$ szintén majdnem mindenhol vagy nulla vagy végtelen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\eta = 0) &\mathrel{\hat{=}} \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} w(t) = 0\right) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 1} w(t) \leq 0\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} w(t+1) \leq 0\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(w(1) + \sup_{t\geq 0}(w(t+1) - w(1)) \leq 0\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(w(1) \leq 0, \sup_{t\geq 0}(w(t+1) - w(1)) = 0\right).
\end{aligned}$$

A két esemény független, így

$$p \mathrel{\hat{=}} \mathbf{P}(\eta = 0) \leq \mathbf{P}(w(1) \leq 0) \cdot \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}\{w(t+1) - w(1)\} = 0\right) = \frac{1}{2}p$$

következésképpen $p = 0$.

□

A Wiener-folyamatok folytonossága miatt azonnal következik a következő észrevétel:

0.2 Állítás.
Ha w egydimenziós Wiener-folyamat, akkor tetszőleges a szám esetén a

$$\{t : w(t) = a\}$$

időhalmaz nem korlátos felülről. Speciálisan az egydimenziós Wiener-folyamatok tetszőleges időpont után végtelen sokszor visszatérnek az origóba.

0.3 Állítás. (Nagy számok erős törvénye Wiener-folyamatokra)
Ha w Wiener-folyamat, akkor egy valószínűséggel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0.$$

Bizonyítás: Az állítás naív bizonyítása esetén a gondot nyilván az jelenti, hogy a klasszikus nagy számok törvénye szerint a konvergencia majdnem mindenhol teljesül, a függvények határértékének definíciója miatt a nullához való konvergenciának minden végtelenhez tartó idősorozat esetén teljesülni kell, így potenciálisan végtelen sok nullhalmazt kellene egyesíteni.

Doob-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{E}\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left(\frac{w(t)}{t}\right)^2\right) \leq \frac{1}{2^{2n}} \mathbf{E}\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} w^2(t)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot 4 \cdot \mathbf{E}\left(w^2\left(2^{n+1}\right)\right) = \frac{4}{2^{2n}} \mathbf{D}^2 w^2\left(2^{n+1}\right) = \frac{4}{2^{2n}} 2^{n+1} = \frac{8}{2^n}.$$

A Markov-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{E}\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|w(t)|}{t} > \varepsilon\right) \leq \frac{8}{2^n \varepsilon^2}.$$

A Borel–Cantelli lemma alapján majdnem minden kimenetelre véges sok n indextől eltekintve

$$\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|w(t)|}{t} \leq \varepsilon,$$

amiből az állítás már evidens.

□

0.4 Állítás.
Ha w Wiener-folyamat, akkor

$$\widetilde{w}(t) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} t \cdot w(1/t) & \text{if} \quad t > 0 \\ 0 & \text{if} \quad t = 0 \end{cases}$$

megkülönböztethetelen egy Wiener-folyamattól.

Bizonyítás: Emlékeztetünk arra, hogy definíció szerint két folyamat megkülönböztethetetlen, ha nulla valószínűségtől eltekintve a trajektóriáik egybeesnek[1]. A gondot egyedül a $\widetilde{w}(0) \stackrel{\circ}{=} 0$ pontban való jobbról való folytonosság jelenti, amely azonban az előző tétel miatt majdnem minden kimenetelre teljesül. A "gonosz" kimenetelekre a $\widetilde{w}$ folyamatot azonosan nullának definiálva Wiener-folyamatot kapunk.

□

0.1 Példa.
Véletlen időpontok, amelyek nem megállási idők.

Legyen $a > 0$ és legyen w egy Wiener-folyamat.

1. Legyen

$$\gamma_a \stackrel{\circ}{=} \sup\{0 \leq s \leq a : w(s) = 0\} = \inf\{s \geq 0 : w(a - s) = 0\}$$

az utolsó időpont, amikor a $[0, a]$ szakaszon a w nulla. A γ_a nyilván $\mathcal{F}_a$-measurable, vagyis egy valószínűségi változó, véletlen időpont. Mivel $\mathbf{P}(w(a) = 0) = 0$ ezért

[1] Ez nem azonos a módosítás erejéig való azonossággal, ugyanis definíció szerint két folyamat akkor azonos a módosítás erejéig, ha minden t időpontban ugyanazt a valószínűségi változót definiálják. Ez folytonos időhorizont esetén azonban még megengedi, hogy a trajektóriák egyetlen kimenetelre sem egyezzenek meg. V.ö.: Egy négyzet átlóján kívül a folyamat nulla és az azonosan nulla folyamat.

egy valószínűséggel $\gamma_a < a$. Tegyük fel, hogy a γ_a megállási idő. Ekkor az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$w^*(t) \circeq w(t+\gamma_a) - w(\gamma_a)$$

újraindított folyamat szintén Wiener-folyamat. Könnyen igazolható, hogy ha w^* Wiener-folyamat, akkor a $\widetilde{w}(t) \circeq tw^*(1/t)$ is Wiener-folyamat. Mivel minden egydimenziós Wiener-folyamat egy valószínűséggel visszatér az origóba az erős Markov-tulajdonság miatt a $\widetilde{w}$ is visszatér az origóba tetszőleges t időpont után. Ebből következően van olyan $t_n \searrow 0$ sorozat, amelyre $t_n > 0$ és $w^*(t_n) = 0$. De ez lehetelen, ugyanis a w^* nem lehet nulla $(0, a - \gamma_a]$ szakaszon.

2. Legyen

$$\begin{aligned} \beta_a &\circeq \max\{w(s) : 0 \le s \le a\}, \\ \rho_a &\circeq \inf\{0 \le s \le a : w(s) = \beta_a\}. \end{aligned}$$

A ρ_a az az időpont, ahol a w a $[0, a]$ szakaszon felveszi a maximumát. Megmutatjuk, hogy a ρ_a nem megállási idő. Mivel $\mathbf{P}(w(a) - w(a/2) < 0) = 1/2$, ezért

$$\mathbf{P}(\rho_a < a) > 0.$$

Ha ρ_a megállási idő lenne, akkor az erős Markov-tulajdonság miatt

$$w^*(t) \circeq w(t+\rho_a) - w(\rho_a)$$

szintén Wiener-folyamat lenne. Ez azonban ellenmondásra vezet. Minden Wiener-folyamatra majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty.$$

Ha ezt a

$$\widetilde{w}(t) \circeq tw^*(1/t)$$

megfordított folyamatra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy minden Wiener-folyamat az origó közelében majdnem minden kimenetelre tetszőleges rövid időszakaszon felvesz pozitív értéket. Ez azonban a w^* esetén nem teljesül, ugyanis pozitív valószínűséggel a $(0, a - \rho_a]$ szakasz nem üres és a w^* nem rendelkezik pozitív értékkel ezen a szakaszon.

$\square$