Vegyük észre, hogy egy mérhető f függvény pontosan akkor integrálható, ha

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|f_\alpha|>N\}}|f|\,d\mu=0.$$

Ez indokolja a következő definíciót.

0.1 Definíció.
Egy $(X,\mathcal{A},\mu)$ téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty}\sup_\alpha\int_{\{|f_\alpha|>N\}}|f_\alpha|\,d\mu=0.$$

0.1 Példa.
Ha a g függvény integrálható és minden α indexre $|f_\alpha|\le g$, akkor az (f_α) család egyenletesen integrálható.

0.2 Példa.
Ha $(f_\alpha)_\alpha$ függvények egy halmaza, G olyan nem negatív növekedő függvény, amelyre

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{t}=\infty,$$

és

$$\sup_\alpha\int_X G(|f_\alpha|)\,d\mu<\infty,$$

akkor az $(f_\alpha)_\alpha$ egyenletesen integrálható. Speciálisan ha $p>1$ és az $(f_\alpha)_\alpha$ halmaz korlátos az L^p térben, akkor a halmaz egyenletesen integrálható[1]*.*

Ha $\varepsilon>0$ tetszőleges, $M\doteq\sup_\alpha\int_X G(|f_\alpha|)\,d\mu$, $a\doteq M/\varepsilon$, és N olyan nagy, hogy $G(t)/t\ge a$, ha $t\ge N$, akkor

$$\int_{\{|f_\alpha|>N\}}|f_\alpha|\,d\mu\le\frac{1}{a}\int_{\{|f_\alpha|>N\}}G(|f_\alpha|)\,d\mu\le\frac{M}{a}=\varepsilon.$$

□

0.2 Állítás.
Ha az X alaptér mértéke véges, akkor az $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmaz pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha

1. *az $\left(\int_X|f_\alpha|\,d\mu\right)_\alpha$ halmaz korlátos és*
2. *$\mu(A)\to 0$ esetén $\int_A|f_\alpha|\,d\mu\to 0$ az α szerint egyenletesen, vagyis*

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\sup_\alpha\left(\int_A|f_\alpha|\,d\mu\right)=0.$$

Bizonyítás: Evidens módon

$$\begin{aligned}\int_A|f_\alpha|\,d\mu &= \int_A|f_\alpha|\chi(|f_\alpha|\le N)\,d\mu+\int_A|f_\alpha|\chi(|f_\alpha|>N)\,d\mu\le\\ &\le N\mu(A)+\int_{\{|f_\alpha|>N\}}|f_\alpha|\,d\mu.\end{aligned}$$

[1] Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az L^1-ben korlátos halmazok nem feltétlenül egyenletesen integrálhatóak. Ugyanakkor, ha $p>1$, akkor az L^p tér korlátos részhalmazai egyenletesen integrálhatóak. Ez egy sajátos megjelenése az L^p terek dualitásának: Ha $p>1$, akkor az L^p második duálisa önmaga, de ez nem igaz, ha $p=1$.

Ha az $(f_\alpha)_\alpha$ egyenletes integrálható, akkor elég nagy N-re a második tag $\varepsilon/2$ alá hozható. Ha $A = X$, akkor az alaptér végessége miatt a kifejezés korlátos, következésképpen teljesül az 1. Ha $\mu(A) \to 0$, akkor az első tag is $\varepsilon/2$ alá vihető, vagyis teljesül a 2. is. Megfordítva legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ olyan, hogy minden α-ra $\int_A |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon$, ha $\mu(A) < \delta$. Elemi számolással, az integrál definíciója, és az első feltétel alapján

$$\mu(|f_\alpha| > N) \leq \frac{1}{N} \int_X |f_\alpha| \, d\mu \leq \frac{K}{N} \to 0,$$

amiből elég nagy N-re tetszőleges α-ra $\mu(|f_\alpha| > N) < \delta$, vagyis

$$\int_{\{|f_\alpha| > N\}} |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon,$$

következésképpen az $(f_\alpha)_\alpha$ egyenletesen integrálható.

$\square$

0.3 Állítás.

Ha a μ mérték véges, az $(f_n)_n$ függvények egyenletesen integrálhatóak, és a sztochasztikus konvergenciában[2] *$f_n \to f$, akkor az f is integrálható, és*

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu, \quad \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Bizonyítás: Mivel véges mértékű halmazon az előző állítás szerint az egyenletes integrálhatóságból következik az L^1 korlátosság, és a sztochasztikusan konvergens sorozatoknak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért a Fatou-lemma alapján

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty,$$

vagyis az f integrálható, speciálisan az $(f_n - f)_n$ is egyenletesen integrálható.

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu.$$

A sztochasztikus konvergencia miatt $\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$, amiből viszont ismételten az egyenletes integrálhatóság alapján a jobb oldali összeg tetszőlegesen kicsivé tehető.

[2] Véges mérték esetén a pontonkénti, vagy a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.