Sztochasztikus folyamatok

Medvegyev Péter

2009. május 6.

Tartalomjegyzék

Ezt a jegyzetet két okból írtam: Egyrészt össze akartam foglalni a Gazdaságmatematika szakon az elmúlt három évben tartott előadásaimat, másrészt egyérteműen jelezni akartam a hallgatóknak, hogy mi a tananyag, mit várok el tőlük a vizsgán. A jegyzet pontosan követi a `medvegyev.uni-corvinus.hu` honlapon szereplő tananyagot. Mintegy annak öszefoglalása és összeszerkesztése. A tananyag tartalmán három év alatt nem sokat változtattam. A jegyzet összeállítása során viszonylag könnyű dolgom lett volna ha a feltöltött állományok egy jelentős részének nem veszett volna el a forrása. Ez sem okozott azonban sok gondott ugyanis így csak vissza kellett nyúlnom az eredeti forrásukhoz, a *Valószínűségszámítás* és a *Sztochasztikus analízis* könyvekhez. Evvel persze az elmúlt évek kisebb javításai esetleg elvesztek és esetleg az eredeti anyagokban levő hibák újra visszakerültek.

Természetesen a jegyzet alapvetően a sztochasztikus folyamatok modern elméletéről szól, de mindig a közgazdasági, elsősorban pénzügyi alkalmazások szemléletéből kiindulva. Ezért a tárgyalás tengelyében a sztochasztikus integrálás elmélete van. Az egyes fejezetek a honlapon jelzett pontoknak felelnek meg. Időnként előrehivatkozásokkal is találkozhat az olvasó, és általában a tételek rendje nem feltétlenül logikus. Ugyanis ez egy jegyzet és nem egy tankönyv.

1. fejezet

A sztochasztikus folyamatok általános elmélete

A továbbiakban rögzítsük az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ szerint mérhető, valós szám értékű függvények összességére mint valószínűségi változókra[1] fogunk hivatkozni. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mezőről feltesszük, hogy teljes, vagyis tartalmazza a nulla valószínűséggel rendelkező halmazok összes részhalmazát is. Ez a feltétel, bár nem jelent megszorítást némiképpen meglepő[2]. A teljességre azonban folyamatosan szükségünk lesz. Például folytonos időparaméter mellett is biztosítani szeretnénk, hogy a Borel-halmazok találati ideje[3] mindig megállási idő[4] legyen. Ennek igazolása a vetítési tételre[5] épül, és a vetítési tétel alkalmazásakor fel kell tételezni a mérhető tér teljességét. A sztochasztikus folyamatok elméletében sokszor találkozhatunk olyan mérhető függvényekkel, amelyek pozitív mértékű halmazon végtelenek, vagyis a függvény értékkészlete hangsúlyozottan nem az $\mathbb{R}$, hanem a kiterjesztett valós számok $\overline{\mathbb{R}} \doteq [-\infty, \infty]$ halmaza. A legfontosabb példát a véletlen időpontban bekövetkező, úgynevezett megállási idők, más néven megállási szabályok szolgáltatják. Ha a megállási szabály által reprezentált esemény valamely kimenetelre nem következik be, akkor a szabály értékét az adott kimenetelen célszerű végtelennek választani, így a megállási idők értéke pozitív valószínűségű halmazon végtelen lehet. A sztochasztikus folyamatok értékeit minden időpontban valószínűségi változónak tekintjük, előfordulhat azonban, hogy valamely sztochasztikus folyamat értéke bizonyos időpontokban végtelen[6].

1.1. Sztochasztikus folyamatok trajektóriái

Első megközelítésben a sztochasztikus folyamat olyan $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény, amely rögzített t paraméter esetén az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren értelmezett valószínűségi változó. A lehetséges időparaméterek Θ halmaza rendszerint a valós számok részhalmaza. Ha folytonos idejű sztochasztikus folyamatokat vizsgálunk, akkor a Θ egy intervallum, általában $\Theta = \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, de paraméterhalmazként a $[0, \infty]$ és a $(0, \infty)$ is gyakran előfordul. A továbbiakban, ha másképpen nem említjük, akkor a lehetséges időpontok Θ halmazán az $\mathbb{R}_+$ félegyenest értjük. A sztochasztikus folyamat definíció azonban pontosításra szorul. A valószínűségi változók a valószínűségszámítás és a matematikai analízis felfogása szerint ekvivalenciaosztályok. Ennek megfelelően rögzített ω esetén nem beszél-

[1] V.ö.: A valószínűségi változó fogalma és trajektóriák problémája.

[2] A teljesség feltétele mindig garantálható, így ártalmatlan és lényegtelen feltételnek tűnik. A megkötés meglepő volta éppen az, hogy erre a „jelentéktelen”, és éppen ezért „gyanús” feltételre egyáltalán szükség van. A feltétel „gyanús” volta éppen abban áll, hogy a valószínűségszámításban használt absztrakt mértékelmélet kifejtése során a teljességre tulajdonképpen nincsen szükség.

[3] V.ö.: 1.19. definíció, 10. oldal.

[4] V.ö.: 1.14. definíció, 8. oldal.

[5] V.ö.: 1.22. tétel, 10. oldal.

[6] Tipikus példa a pontfolyamatokhoz rendelt számláló folyamat.

hetünk az $X(t,\omega)$ értékről[7]. Mivel erre szükségünk van, a továbbiakban valószínűségi változó alatt nem az ekvivalenciaosztályt, hanem a függvényosztályból alkalmas szabályok szerint kivett konkrét reprezentánst értünk[8]. Másképpen a sztochasztikus folyamat megadásakor meg kell adni a függvényosztályt, amely tartalmazza a trajektóriákat.

1.1 Definíció.
Valamely $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ mezőn és Θ időhalmazon értelmezett sztochasztikus folyamaton olyan a $\Theta\times\Omega$ halmazon értelmezett kétváltozós függvényt értünk, amely a második koordinátájában az $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ mezőn értelmezett mérhető valós függvény.

1.2 Definíció.
Ha az $\omega\in\Omega$ kimenetelt rögzítjük, akkor a $t\mapsto X(t,\omega)$ hozzárendeléssel definiált $X(\cdot,\omega):\Theta\to\mathbb{R}$ függvényt az X sztochasztikus folyamat ω kimenetel melletti realizációjának vagy trajektóriájának fogjuk nevezni.

Ebben a felfogásban a folyamat konkrét realizációja nem „időpontonként” függ a véletlentől, hanem a realizáció „egésze” függ tőle. A sztochasztikus folyamatok „lezajlását” nem célszerű úgy elgondolni, hogy minden időpontban „kockát vetünk”, hanem úgy, hogy a folyamat „elején” egyszer generálunk egy véletlen kimenetelt, amely már kiválasztja a folyamat teljes realizációját. A látszólagos „szemléleti ellentmondást” úgy oldhatjuk fel, ha megjegyezzük, hogy az Ω halmaz általában már maga is függvénytér, amely a $t\in\Theta$ paramétertől függő függvényekből áll, tehát az $\omega\in\Omega$ meghatározása egy „véletlen folyam” kiválasztását jelenti[9]. Mindjárt a tárgyalás elején célszerű jelezni, hogy a trajektóriákról folytonossági megkötéseket fogunk tenni. Igen gyakran meg fogjuk követelni a trajektóriák folytonosságát, vagy hogy a trajektóriáknak minden időpontban legyen jobb és bal oldali határértéke.

1.3 Definíció.
Az X folyamatot jobbról regulárisnak mondjuk, ha a trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel. Hasonlóan, ha a folyamat trajektóriái balról folytonosak és rendelkeznek jobb oldali határértékkel, akkor a folyamatot balról regulárisnak mondjuk. Az értelmezési tartomány alsó határán a folyamat bal oldali határértékén, illetve az értelmezési tartomány felső határán a folyamat jobb oldali határértékén, definíció szerint, a folyamat helyettesítési értékét értjük, feltéve természetesen a helyettesítési érték létezik.

Némiképpen meglepő, de az, hogy a szakadási pontokban a folyamat a jobb, vagy a bal oldali határértékét veszi fel lényeges megkötést jelent. Ezt azért érdemes jelezni, hogy az olvasó mindjárt a tárgyalás elején érzékelje a trajektóriákra, illetve a folyamatokra tett mérhetőségi és folytonossági megkötések súlyát. Ha az X folyamat trajektóriái minden időpontban rendelkeznek jobb és bal oldali határértékkel, akkor beszélhetünk a folyamat

$$\Delta X(t)\doteq X(t+)-X(t-)$$

ugrásairól. Az értelmezési tartomány alsó és felső határán a határértékekre vonatkozó konvenciónak megfelelően az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett, jobbról reguláris függvény esetén $\Delta X(0)=X(0+)-X(0-)=0$. Például a $\chi_{\mathbb{R}_+}$ függvény, legalábbis mint sztochasztikus folyamat a $t=0$ pontban balról és jobbról is folytonos, a $t=0$ nulla pontban vett ugrása a konvenciónak megfelelően

[7] Ez az a nullmértékű halmazok bosszúja!!! Most bújik ki a szög a zsákból. Pontosabban már kibújt a feltételes várható érték definíciójakor, de akkor még nem látta senki.

[8] Az, hogy ez megtehető vagy sem, az mindig egy jó kérdés. Szemben a valószínűségszámítás legtöbb kérdésével a sztochasztikus folyamatok elmélete egy sor nem triviális részletkérdéssel terhelt, igen technikás terület. A szükséges technika elsajátításának kényszere éppen a nullmértékű halmazok bosszúja!

[9] Általában Ω a lehetséges trajektóriák halmaza, és a különböző folyamatokat az Ω-án megadott mértékek definiálják. Ebben a szemléletben a folyamatok, vagy legalábbis az alapfolyamatok, konstrukciója alkalmas mértékek konstruálását jelenti. Ha Ω a lehetséges trajektóriák tere, akkor a folyamat kanonikus modelljéről beszélünk. A sztochasztikus folyamatok elmélete nem függvénytér értékű valószínűségi változókkal foglalkozó valószínűségszámítás, de az elmélet számos kérdése függvénytereken értelmezett mértékek vizsgálatára vezethető vissza.

nem egy hanem nulla! Természetesen nem akarjuk a határérték fogalmát újradefiniálni[10], csak a szóhasználat egyszerűsítéséről és a terminológia pontosításáról van szó.

1.2. Filtráció, adaptált és progresszíven mérhető folyamatok

Minden folyamat alapvető sajátossága az alapul vett idő „irreverzíbilis változása”. Az „idő múlását” a filtráció fogalma írja le.

1.4 Definíció.
Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn minden $t \in \Theta$ időponthoz rendeljük hozzá egy $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebrát. Ha minden $s < t$ esetén $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, akkor az $\mathcal{F} \stackrel{\circ}{=} (\mathcal{F}_t)_{t\in\Theta}$ összességet eseményfolyamnak, filtrációnak nevezzük. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ négyest sztochasztikus alaptérnek mondjuk. Az $\mathcal{F}$ filtráció segítségével elkészíthetjük az

$$\mathcal{F}_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s,$$

σ-algebrát.

1. *Az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, ha minden t-re $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.*
2. *Azt mondjuk, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ sztochasztikus alaptér teljesíti a szokásos feltételeket ha az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, az $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ nulla halmazait valamint az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ teljes.*

Miként az elnevezés is mutatja, a sztochasztikus alaptérről mindig fel fogjuk tenni a szokásos feltételeket. Az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrát szokás úgy interpretálni, mint az olyan események halmaza, amelyek bekövetkezése, illetve be nem következése a t időpontig eldönthető, másképpen fogalmazva $\mathcal{F}_t$ a t időpontig „felhalmozódott” információk összessége. A nulla halmazokra vonatkozó feltétel úgy interpretálható, hogy ezek bekövetkezését irrelevánsnak gondoljuk.

A filtráció fogalmával esetlegesen először találkozó olvasóban felmerülhet, hogy miként lehet filtrációt „készíteni”, illetve hogy az $\mathcal{A}$ σ-algebrának milyen rész σ-algebrái vannak. Filtrációt számos módszerrel lehet megadni. Tekintsük az úgynevezett kanonikus modellt, vagyis tegyük fel, hogy az Ω elemei a Θ paramétertéren értelmezett alkalmas tulajdonsággal rendelkező függvények, és az $(\Omega, \mathcal{A})$ eseménytér legyen a szorzatmérhetőség által indukált mérhetőségi struktúra, vagyis tekintsük az

$$\{\omega : \omega(t_1) \in I_1, \ldots, \omega(t_n) \in I_n\} \tag{1.1}$$

alakú halmazok által generált σ-algebrát, ahol a $t_1, \ldots, t_n$ időpontok a Θ tetszőleges elemei, az $I_1, \ldots, I_n$ pedig az esemény megfogalmazásához szükséges halmazok. Ha az $\mathcal{F}_t^0$ halmazt úgy definiáljuk, mint az olyan (1.1) alakú halmazok által generált σ-algebrát, amelyekre a t_i időpontok egyike sem nagyobb mint t, akkor monoton növekedő σ-algebra sorozathoz jutunk. Az $\mathcal{F}_t^0$ ismeretében az $Y(t, \omega) \stackrel{\circ}{=} \omega(t)$ folyamat aktuális realizációját meghatározó ω kimenetel t időpontig való lefutása meghatározható, hiszen tetszőleges $s \le t$ időpontra és I intervallumra eldönthető, hogy az

$$\{\omega(s) \in I\} \in \mathcal{F}_t^0$$

esemény teljesült vagy sem. Természetesen, ha $s > t$, akkor az $\omega(s)$ alakulását az $\mathcal{F}_t^0$ már „nem írja elő”. Ez a konstrukció speciális esete a következőnek: Rögzítsük az X alapfolyamatot, és $\mathcal{F}_t^X \stackrel{\circ}{=} \sigma(X(s) : s \le t)$. Mindkét esetben a felső index arra utal, hogy a definiált filtráció még nem azonos a tényleges filtrációval. Ennek oka, hogy a folyamat által generált filtráció általában nem teljesíti a szokásos feltételeket, azaz nem tartalmazza a nullmértékű halmazokat és legtöbbször nem jobbról folytonos. Mivel ez igen nagy hiányosság, ezért az $\mathcal{F}^X$ filtrációt ki kell bővíteni. Leggyakrabban a tényleges $\mathcal{F}$ filtrációt az X alapfolyamat és az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-nullmértékű halmazok

[10] Az értelmezési tartományon kívülről nem lehet határértéket venni, így az általunk bevezetett konvenció nem ütközik a megszokott definícióval. Megjegyezzük, hogy az irodalomban néhány szerző az $X(0-) \stackrel{\circ}{=} 0$ konvencióval él. Ilyenkor általában $(\Delta X)(0) = X(0) \neq 0$.

valamilyen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ osztálya generálja, vagyis $\mathcal{F}_t \doteq \sigma\left(\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}\right)$. Az így kapott $\mathcal{F}$ filtrációt szokás az $\mathcal{F}^X$ kibővített filtrációjának mondani. Meglepő módon a kibővített filtráció igen gyakran[11] jobbról folytonos, vagyis teljesíti a szokásos feltételeket. Ezt mutatjuk be a következő alapvető jelentőségű példával[12]:

1.5 Példa.
A filtráció kibővítése lényeges, az $\mathcal{F}_t^X \doteq \sigma(X(s) : s \leq t)$ nem feltétlenül jobbról folytonos.

Az X folyamat legyen egy w Wiener–folyamat és F legyen az olyan ω kimenetelek halmaza, amelyhez van $\varepsilon > 0$, hogy a $[0, \varepsilon]$ szakaszon a $w(\omega)$ trajektória nulla. Világos, hogy $F = \cup_n F_n$, ahol F_n az olyan kimenetelek halmaza, ahol a $w(\omega)$ nulla a $[0, 1/n]$ szakaszon. Az F_n mérhető, hiszen ekvivalens a $w(r_n, \omega) = 0$, $r_n \in [0, 1/n] \cap \mathbb{Q}$ feltétellel[13]. Evidens módon[14] $\mathbf{P}(F_n) = 0$, ezért az F is mérhető és $\mathbf{P}(F) = 0$. Definíció szerint $w(0) \equiv 0$, ezért $\mathcal{F}_0^0 = \{\Omega, \emptyset\}$, ugyanis tetszőleges konstans értékű függvény által generált σ-algebra csak az üres halmazból, illetve az alaphalmazból áll[15]. Tehát[16] $F \notin \mathcal{F}_0^0$. Ha $t > 0$ és $1/n \leq t$, akkor $F_n \in \mathcal{F}_t^0$, amiből $\cup_{1/n \leq t} F_n \in \mathcal{F}_t^0$. Ugyanakkor tetszőleges t-re

$$\cup_{1/n \leq t} F_n = F,$$

ugyanis evidens módon $\cup_{1/n \leq t} F_n \subseteq F$, de ha $\omega \in F$, akkor alkalmasan nagy n-re $\omega \in F_n \subseteq \cup_{1/n \leq t} F_n$. Ebből viszont $F \in \cap_{t>0} \mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{0+}^0$, vagyis $\mathcal{F}_0^0 \neq \mathcal{F}_{0+}^0$.

□

A példa fényében némiképpen meglepő a következő állítás:

1.6 Állítás.
Ha $\mathcal{F}$ jelöli valamely w Wiener-folyamat kibővített filtrációját, akkor az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos.

1.7 Definíció. (Adaptált folyamat)
Ha az X folyamat minden t időpontban az ω szerint $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis ha minden t-re az $X(t)$ változó, $\mathcal{F}_t$-mérhető, akkor azt mondjuk, hogy az X adaptált az $\mathcal{F}$-re nézve[17]. Az $A \subseteq \Theta \times \Omega$ halmazt adaptáltnak mondjuk, ha az A halmaz χ_A karakterisztikus függvénye adaptált.

A továbbiakban, ha csak explicite nem mondjuk az ellenkezőjét, mindig csak adaptált folyamatokkal foglalkozunk. Könnyen belátható, hogy az adaptált halmazok σ-algebrát alkotnak. Az adaptáltság és a mérhetőség közötti különbség választja el a mértékelméletet a sztochasztikus folyamatoktól. Az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrák elvileg jóval szűkebbek lehetnek mint az $\mathcal{A}$, de mivel csak adaptált folyamatokkal foglalkozunk, feltehetjük[18], hogy $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$, ahol $\mathcal{F}_\infty \doteq \sigma(\mathcal{F}_t : t \in \Theta)$.

---

[11] Vegyük észre, hogy ha a filtráció jobbról folytonos, akkor a nullhalmazokkal kibővített filtráció is jobbról folytonos marad, tehát a jobbról folytonosság garantálása a nehezebb.

[12] A Wiener-folyamattal később részletesebben foglalkozni fogunk. A jelen példa első olvasásra kihagyható.

[13] Ugyanis a w trajektóriái definíció szerint folytonosak.

[14] A folyamat értékének eloszlása minden időpontban folytonos, ugyanis a $w(t)$ minden t-re normális eloszlású. Így nulla annak a valószínűsége, hogy w a folyamat megszámlálható előre megadott pontban nulla értéket vegyen fel.

[15] Ugyanis a generált σ-algebra az $f^{-1}(B)$, B Borel-halmaz, alakú halmazokból áll, és ha f azonosan konstans, akkor az $f^{-1}(B)$ vagy üres, vagy a teljes Ω.

[16] Felmerülhet a kérdés, hogy esetleg $F = \emptyset$. Megmutatható hogy ha $\Omega \doteq C([0, \infty))$ jelöli a $[0, \infty)$ szakaszon értelmezett folytonos függvények összességét és $\mathcal{A}$ a $C([0, \infty))$ szeparábilis metrikus tér Borel–halmazai, akkor van olyan $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető struktúrán, amelyre a $w(t, \omega) \doteq \omega(t)$, $\omega \in \Omega$ koordinátafolyamat Wiener–folyamat. (A pontosság kedvéért a Wiener–folyamatot $w(0) \equiv 0$-val definiáltuk, ezért a $C([0, \infty))$ helyett csak a $t = 0$-ban nulla függvényeket kell venni, de ez a gondolatmenetet nem befolyásolja.) Ebben a speciális esetben az $F \neq \emptyset$ evidens módon teljesül.

[17] Az irodalomban szokás volt jövőtől való függetlenségről beszélni. Ez alatt az kellett érteni, hogy a folyamat értéke a t időpontban nem függ a t után felvett értékétől, a folyamatnak nincsenek a jövőre nézve „várakozásai".

[18] Feltehetjük, de ennek semmi jelentősége a későbbiekben nem lesz.

1.8 Példa.
Ha $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ minden t-re, akkor csak az ω szerint konstans értéket felvevő sztochasztikus folyamatok adaptáltak[19]. *Az $\mathcal{F}_t = \mathcal{A}$ minden t-re, filtrációra nézve minden sztochasztikus folyamat adaptált.*

1.9 Definíció. (Progresszíven mérhető folyamat)
Az $A \subseteq \Theta \times \Omega$ halmazt progresszíven mérhetőnek mondjuk, ha minden $t \in \Theta$ esetén

$$A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t,$$

vagyis az A halmaznak a $[0,t] \times \Omega$ halmazra való leszűkítése $(\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t)$-mérhető. A progresszíven mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amelyet $\mathcal{R}$-rel fogunk jelölni. Az X folyamat progresszíven mérhető, ha mint kétváltozós függvény $\mathcal{R}$-mérhető[20].

A progresszíven való mérhetőség fogalma némiképpen erőltetettnek tűnik. Miért nem elegendő az adaptáltság? Milyen heurisztikus indok magyarázza a progresszíven való mérhetőség bevezetését? A filtrációt általában valamilyen, a vizsgált modellben szereplő, ott explicit módon megadott külső véletlen forrás definiálja: a filtráció általában ezen külső forrás által generált filtráció, természetesen kiegészítve a nullmértékű halmazokkal. Ilyenkor a generált σ-algebrák struktúrája szerint[21] az $\mathcal{F}_t^0$ σ-algebrában szereplő tetszőleges eseményt a véletlen forrás t előtti megszámlálható számú időpontban való megfigyeléséből származó információ írja le. Az $\mathcal{F}_t$-ben tehát nullmértékű halmaztól eltekintve a megszámlálható megfigyeléssel leírható halmazok vannak. Ennek megfelelően az adaptáltság heurisztikusan a megszámlálható időpontban megfigyelt információtól való függést jelenti. A progresszíven való mérhetőség megkövetelése esetén a nem megszámlálható számosságú időpontokban való megfigyeléseket is figyelembe akarjuk venni[22]. Hangsúlyozzuk, hogy az adaptáltság a parciális mérhetőségnek megfelelő fogalom, a progresszíven való mérhetőség a szorzatmérhetőség általánosítása. Általában a szorzatmérhetőség garantálása nem is olyan egyszerű. Az egyedüli jól használható kritérium a következő:

1.10 Állítás.
Ha az X adaptált folyamat minden realizációja minden időpontban vagy balról vagy jobbról folytonos, akkor az X progresszíven mérhető[23].

Bizonyítás: Jelölje $\mathcal{F}$ a filtrációt. Tegyük fel, hogy a folyamat trajektóriái jobbról folytonosak. Az egyszerűbb jelölés végett vegyük a $[0,\infty)$ intervallumot, és rögzítsünk le egy $t > 0$ időpontot. Jelölje X a leszűkített folyamatot. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra osszuk fel a $[0,t]$ intervallumot 2^n részre, és

$$X_n(s,\omega) \circeq \begin{cases} X\left(\frac{kt}{2^n}, \omega\right) & \text{ha} \quad s \in \left(\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}\right] \\ X(0,\omega) & \text{ha} \quad s = 0 \end{cases}.$$

Mivel az $s \mapsto \mathcal{F}_s$ monoton, ezért az X_n lépcsős folyamat $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető. A feltételezett jobbról való folytonosság miatt, ha $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} X_n(s,\omega) = X(s,\omega),$$

[19] Ezeket szokás determinisztikus folyamatoknak mondani.

[20] Vagy ami ugyanaz, minden t esetén a folyamat leszűkítése a $[0,t]$ időszakszra $(\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t)$-mérhető.

[21] A mértékelméleti bevezetés során meg szokás mutatni, hogy valamely függvényhalmaz által generált σ-algebra minden eleme benne van egy az eredeti halmaz egy alkalmas megszámlálható részhalmaza által generált σ-algebrában. Másképpen egy függvényhalmaz által generált σ-algebra a generáló függvénysereg megszámlálható részhalmazai által generált σ-algebrák egyesítése.

[22] Később látni fogjuk, hogy a progresszíven való mérhetőség a sztochasztikus folyamatok trajektóriánkénti integrálása során, illetve a megállított változók mérhetőségének indoklásakor szerepel. Mindkét esetben a konstrukció során készített változók értéke az eredeti folyamat nem megszámlálható időpontban felvett értékétől függ.

[23] A balról illetve a jobbról való folytonosság nem kimenetenként értendő, hanem az egész folyamatra nézve vagy az egyik vagy a másik oldali folytonosságnak kell teljesülnie. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy szinte kivétel nélkül mindig feltesszük, hogy a trajektóriák regulárisak, vagyis hogy a trajektóriáknak nincsen másodfajú szakadása, és valamelyik oldalról folytonosak. Ennek megfelelően a progresszív mérhetőség igen enyhe megkötés. Mivel az $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{A}$ filtrációra minden sztochasztikus folyamat adaptált, ezért speciálisan minden, az időparaméter szerint jobbról, vagy balról folytonos folyamat szorzatmérhető.

ezért az X is $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ mérhető. A bizonyítás csekély módosításával, az X_n definíciójában az intervallum másik végpontját megadva, az állítás igazolható akkor is, ha az X balról folytonos.

□

1.11 Példa.
$\Delta X(t) \triangleq X(t) - X(t-)$ folyamat progresszíven mérhető.

Progresszíven mérhető folyamatokra a kanonikus példát a reguláris trajektóriájú sztochasztikus folyamatok ugrásaiból álló folyamatok szolgáltatják. Ha az X folyamat például jobbról reguláris, akkor az ugrásaiból álló $\Delta X(t) \triangleq X(t) - X(t-)$ folyamat nem lesz se jobbról, se balról folytonos, de progresszíven mérhető lesz, ugyanis két progresszíven mérhető függvény különbsége.

□

1.12 Példa.
Adaptált folyamat, amely nem progresszíven mérhető.

Legyen $\Theta \triangleq \Omega \triangleq [0,1]$, a σ-algebra mind a két halmazon legyen $\mathcal{B}([0,1])$. Az $\mathcal{F}$ filtráció minden t-re álljon a $[0,1]$ egy pontból álló részhalmazai által generált σ-algebra halmazaiból. Legyen

$$X(t,\omega) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t = \omega \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq \omega \end{cases}.$$

Vagyis X legyen a

$$\Delta \triangleq \{(t,\omega) : t = \omega\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$$

átló karakterisztikus függvénye. Az $X(t)$ minden t időpontban csak két értéket vehet fel, és triviálisan adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve[24]. Ugyanakkor az X például nem $\mathcal{B}(\Theta) \times \mathcal{F}_{1/2}$ mérhető, és ezért az X nem progresszíven mérhető. (Ha az X folyamat szorzat mérhető lenne, akkor a

$$([0,1/2] \times \Omega) \cap \Delta = ([0,1/2] \times \Omega) \cap \{X = 1\}$$

halmaz is szorzat mérhető lenne és a halmaz Ω halmazra való vetületének, vagyis a $[0,1/2]$ halmaznak, mérhetőnek kellene lenni[25].) Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{P}$ az $\Omega = [0,1]$ halmazon a Lebesgue-mérték, akkor az $X(t)$ minden t időpontban ekvivalens az $Y(t) = 0$ progresszíven mérhető folyamattal, vagyis az X-hez található olyan Y progresszíven mérhető folyamat, hogy minden t-re az $X(t)$ és az $Y(t)$ valószínűségi változók ugyanabba az osztályba tartoznak.

□

A progresszíven való mérhetőség igen enyhe feltétel, tulajdonképpen a sztochasztikus folyamatok elméletében használható legenyhébb használható mérhetőségi megkötés. A progresszíven való mérhetőség fontos következménye, amely a Fubini–tétel közvetlen folyománya, hogy a feltétel teljesülésekor tetszőleges μ lokálisan véges[26] mérték esetén a

$$(t,\omega) \mapsto \int_0^t X(s,\omega)\, d\mu(s)$$

integrálfolyamat adaptált marad. Hangsúlyozni kell, hogy a μ mértéknek lokálisan végesség miatt definiálható a $V(t) \triangleq \mu((0,t])$ „eloszlásfüggvénye”, amely egy korlátos változású függvény. Ha $\mu(\{0\}) = 0$, akkor a V jobbról reguláris. A $\mu(\{0\}) = 0$ megkötésre a $t = 0$ pontban tett speciális megkötések miatt van szükség. Ezt az észrevételt általánosíthatjuk véletlen mértékek esetére is.

1.13 Állítás.
Legyen V jobbról reguláris és adaptált folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy a V mindegyik trajektóriája véges változású, vagyis az összes $[0,t]$. kompakt időszakaszon az összes trajektória korlátos változású.

[24] Az $\{X(t) = 1\}$ halmaz egyetlen pontból áll és így eleme az egy pontból álló halmazok által generált σ-algebrának.

[25] Ha a legfeljebb megszámlálható halmazok mértéke nulla, a nem megszámlálhatóké pedig egy akkor a mértéktér teljes.

[26] A lokálisan végesség definíció szerint azt jelenti, hogy minden kompakt halmaz mértéke véges. Így a μ σ-véges.

1. *Ha minden ω kimenetelre az $X\ (\omega)$ trajektóriák a $V(\omega)$ mértékre nézve az összes véges időszakaszon integrálhatóak, akkor az*

$$
\begin{aligned}
Y(t,\omega) &\overset{\circ}{=} \int_0^t X(s,\omega)\, V(ds,\omega) \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_0^\infty \chi((0,t])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\
&= \int_0^\infty \chi([0,t])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega)
\end{aligned}
$$

parametrikus integrálok jobbról regulárisak. Speciálisan ez a tulajdonság teljesül, ha az X trajektóriái regulárisak[27]*.*

2. *Ha az X progresszíven mérhető, akkor az Y adaptált.*

Bizonyítás: Az állítás első fele a majorált konvergencia tétel közvetlen következménye. Például

$$
\begin{aligned}
Y(t+,\omega) &\overset{\circ}{=} \lim_{h\searrow 0} \int_0^{t+h} X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\
&= \lim_{h\searrow 0} \int_0^{t+1} \chi([0,t+h])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\
&= \lim_{h\searrow 0} \int_0^{t+1} \lim_{h\searrow 0} \chi([0,t+h])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\
&= \lim_{h\searrow 0} \int_0^{t+1} \chi([0,t])\, X(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \\
&= \int_0^t X(s,\omega)\, V(ds,\omega) \overset{\circ}{=} Y(t,\omega).
\end{aligned}
$$

A bizonyításban természetesen minden egyes ω kimenetelre a $V(\omega)$ trajektória által generált mérték szerint kellett külön-külön integrálni. A reguláris trajektória definíciója miatt a V minden trajektóriája folytonos a $t=0$ pontban, így a $\{t=0\}$ pont mértéke az összes kimenetelre nulla. Az első tulajdonság második fele egyszerű következménye annak, hogy egy reguláris függvény minden kompakt halmazon korlátos: Ha ez nem így lenne és egy reguláris f függvény egy kompakt $[a,b]$ szakaszon nem lenne korlátos, akkor egy alkalmas az $[a,b]$ szakaszból vett (t_n) sorozatra $|f(t_n)| \geq n$ lenne. Mivel az $[a,b]$ kompakt ezért feltehető, hogy a sorozatnak van részsorozata, amely egy $t^* \in [a,b]$ ponthoz konvergál. A számegyenes elemi tulajdonsága miatt a t^* vagy egy jobbról vagy balról vett sorozattal és elérhető. De ez triviálisan ellentmond annak, hogy az f-nek minden pontban van jobbról és balról is határértéke.

A bizonyítás második felére rátérve vegyük észre, hogy mivel a V nem determinisztikus, az állítás második felének igazolásához nem alkalmazhatjuk közvetlenül a Fubini-tételt, de a Fubini-tétel bizonyításának gondolatmenete értelemszerűen kiterjeszthető erre az esetre is. Jelölje $\mathcal{H}$ az olyan korlátos folyamatok családját, amelyre az $Y(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_t$-mérhető. Mivel a feltétel szerint a véges időszakaszokon a V minden trajektóriája korlátos változású, ezért az általa generált mérték minden kimenetelre minden véges időszakaszon véges, így a korlátos függvények integrálhatóak, következésképpen a $\mathcal{H}$ lineáris tér és a $\mathcal{H}$, tartalmazza a konstans $X \equiv 1$ folyamatot. Ha $0 \leq H_n \in \mathcal{H}$ és $H_n \nearrow H$ és a H korlátos, akkor a domináns konvergencia tétel miatt $H \in \mathcal{H}$. Ebből következően a $\mathcal{H}$ egy λ-rendszer. Ha $C \in \mathcal{F}_t$ és $s_1 \leq s_2 \leq t$, valamint $B \overset{\circ}{=} (s1, s2] \times C$, akkor felhasználva, hogy a V a feltétel szerint adaptált az

$$
\int_0^t \chi_B(s,\omega)\, V(ds,\omega) = \chi_C(V(s_2) - V(s_1))
$$

[27]Figyeljük meg, hogy definíció szerint az integrációs tartomámyból a $t=0$ pontot mindig kihagyjuk.

parametrikus integrál $\mathcal{F}_t$-mérhető. A $C \times ((s_1, s_2])$ alakú halmazok π-rendszert alkotnak, így a kararakterisztikus függvényeik halmaz szorzat zárt. A monoton osztály tétel miatt a $\mathcal{H}$ tartalmazza a χ_B alakú függvények által generált σ-algebrát. Mivel a $C \in \mathcal{F}_t$ tetszőleges lehet ezért az említett π-rendszer éppen a $\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t$ szorzatmérhető halmazokból álló σ-algebrát generálja. Az X progresszíven mérhető, így a $[0,t]$ szakaszra való leszűkítése $(\mathcal{B}((0,t]) \times \mathcal{F}_t)$-mérhető. Következésképpen az állítás teljesül, ha az X korlátos és progresszíven mérhető. Ebből az általános eset a majorált konvergencia tételből már következik.

□

1.3. Megállási idők

A filtráció mellett a sztochasztikus folyamatok elméletének másik alapfogalma a megállási idő, vagy másképpen megállási szabály. A megállási idő interpretációja a véletlen időpontban bekövetkező esemény bekövetkezésének időpontja. Nem túl meglepő módon a sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatban felvethető legtöbb releváns kérdés megállási szabályokkal függ össze. Nem minden véletlen időpont megállási idő. Csak azokat a véletlen időpontokat tekintjük megállási időnek, amelyek az alábbi definícióban szereplő módon összekapcsolódnak a filtrációval. Interpretációját tekintve a megállási idő olyan véletlen időpont, amelynek bekövetkezése a filtrációban szereplő információ alapján eldönthető[28].

1.14 Definíció.
Legyen adva az Ω kimenetelek halmaza és az $\mathcal{F}$ filtráció. Legyen $\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}$.

1. *A τ függvényt az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó megállási időnek, vagy megállási szabálynak mondjuk, ha minden $t \in \Theta$ esetén*
$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2. *A $\tau : \Omega \to \Theta \cup \{\infty\}$ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó gyenge megállási idő, vagy gyenge megállási szabály ha minden $t \in \Theta$ esetén*
$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha az $\mathcal{F}$ filtráció a szövegkörnyezetből evidens, akkor a rá való hivatkozást elhagyjuk és egyszerűen megállási időről, vagy gyenge megállási időről fogunk beszélni.

1.15 Példa.
Majdnem mindenhol nulla függvények mint megállási idők.

Legyen N nulla valószínűségű halmaz és a $\tau \geq 0$ függvény legyen nulla az N komplementerén. Mivel megköveteltük a szokásos feltételeket, ezért az $\mathcal{F}_t$ eseményterek tartalmazzák a nulla valószínűségű halmazokat és minden t-re az $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ teljes. Ebből következően a τ megállási idő, ugyanis minden t-re teljesül a $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ feltétel. Hasonlóan, ha a σ nullmértékű halmaztól eltekintve $+\infty$, akkor a σ megállási idő. A két példa speciális esete a következőnek: Ha a τ megállási idő és a τ és a σ nullmértékű halmaztól eltekintve azonosak és $\sigma \geq 0$, akkor a σ is megállási idő. A példa minden trivialitása ellenére alapvető, ugyanis rámutat a teljesség egyik igen gyakran használt következményére, miszerint teljesülése esetén a megállási szabályokat nullmértékű halmazon módosítva megállási szabályt kapunk.

□

[28] Ha autóval utazunk, és τ egy megadott város utáni első benzinkút elérésének ideje, akkor a τ megállási idő, de a város utolsó benzinkútjának elérési ideje nem megállási idő, ugyanis csak úgy találhatjuk meg, ha a város végét jelző tábla után visszafordulunk. Ugyancsak nem megállási idő például a trajektória maximumának helye, ugyanis az, hogy hol van a maximum csak a teljes trajektória ismeretében állapítható meg. Nem megállási idő a trajektóriák utolsó zérushelye, de általában az első zérushely megállási idő. A megállási idő tehát interpretációját és matematikai definícióját tekintve igen speciális mérhető függvény. Az irodalomban a terminológia nem egységes. Időnként megállási időn csak a véges értékű megállási időket értik, a végtelen értéket is felvevő megállási időt pedig Markov–időnek nevezik, de a fordított megkülönböztetésre is találhatunk példát.

Többször látni fogjuk, hogy a sztochasztikus folyamatok elmélete az időtengely szempontjából nem szimmetrikus. A filtráció az időtengely egyértelmű irányítását definiálja. Ennek egyik fontos megjelenése a következő elemi, de igen gyakran használt állítás.

1.16 Állítás.
Minden megállási idő gyenge megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor minden gyenge megállási idő megállási idő.

Bizonyítás: Valóban, felhasználva, hogy minden filtráció monoton nő

$$\{\tau < t\} = \cup_n \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Megfordítva, ha az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, vagyis ha $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, akkor

$$\{\tau \leq t\} = \cap_n \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \cap_n \mathcal{F}_{t+1/n} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

□

A filtráció jobbról való folytonossága fontos szerepet játszik a következő állításban is.

1.17 Állítás.
Ha τ és σ megállási idők, akkor a $\tau \wedge \sigma$ és a $\tau \vee \sigma$ is megállási idő. Ha (τ_n) megállási idők monoton növekedő sorozata, akkor a

$$\tau \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \tau_n$$

is megállási idő. Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos és (τ_n) megállási idők monoton csökkenő sorozata, akkor a

$$\tau \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \tau_n$$

szintén megállási idő.

Bizonyítás: Legyenek τ és σ megállási idők.

$$\begin{aligned}
\{\tau \wedge \sigma \leq t\} &= \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \\
\{\tau \vee \sigma \leq t\} &= \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}$$

Ha $\tau_n \nearrow \tau$, akkor minden t-re

$$\{\tau \leq t\} = \cap_n \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha $\tau_n \searrow \tau$, akkor minden t-re

$$\{\tau \geq t\} = \cap_n \{\tau_n \geq t\} \in \mathcal{F}_t$$

vagyis

$$\{\tau < t\} = \cup_n \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos, akkor a τ megállási idő.

□

1.18 Következmény.
Ha az $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos és (τ_n) megállási időkből álló sorozat, akkor a

$$\limsup_{n\to\infty} \tau_n, \quad \liminf_{n\to\infty} \tau_n$$

határértékek szintén megállási idők.

A megállási idő absztrakt fogalmát a következő definíció és az azt követő tétel teszi tartalmassá.

1.19 Definíció.
Ha $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$, akkor a

$$\tau_\Gamma(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : (t, \omega) \in \Gamma\} \tag{1.2}$$

kifejezést a Γ halmaz kezdőidejének nevezzük. Ha $B \subseteq \mathbb{R}$, X sztochasztikus folyamat, akkor a

$$\tau_B(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : X(t, \omega) \in B\} \tag{1.3}$$

esetenként a

$$\tau_B(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t > 0 : X(t, \omega) \in B\} \tag{1.4}$$

változót a B halmaz elérési, vagy találati idejének fogjuk nevezni[29].

A halmazok elérési ideje speciális esete a halmaz kezdőidejének, ugyanis ha $B \subseteq \mathbb{R}$, X sztochasztikus folyamat, $\Gamma \stackrel{\circ}{=} \{X \in B\}$, illetve $\Gamma \stackrel{\circ}{=} \{X \in B\} \cap \{t > 0\}$, akkor $\tau_\Gamma = \tau_B$.

1.20 Példa.
Találati időkre, így megállási időkre vonatkozó legfontosabb példák a

$$\tau_a(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : X(t, \omega)\, \mathcal{R} a\}$$

típusú szintátlépési idők, ahol $\mathcal{R}$ a $\geq, >, \leq, <$ relációk valamelyike.

A szokásos feltételek alapvetőek a következő Dellacherietől származó tételben:

1.21 Tétel. (Megállási idők konstruálása)
Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ kielégíti a szokásos feltételeket és a Γ halmaz progresszíven mérhető, akkor a Γ (1.2) kezdőideje megállási idő.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következőre[30]:

1.22 Tétel. (Vetítési tétel)
Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér teljes és

$$U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A},$$

akkor

$$\mathrm{proj}_\Omega U \stackrel{\circ}{=} \{x : \exists t, (t, x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy az állítás érvényét veszti, ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ nem teljes. Meg kell még jegyezni, hogy a tétel akkor sem teljesül, ha a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}$ helyett egy bővebb σ-algebrát veszünk, ami egyúttal a Borel és a szorzatmérhetőség fogalmak fontosságát nyomatékosítja. A vetítési tétel bizonyítása túl messzire vezetne, így elhagyjuk.

Bizonyítás: Vegyük a $\Gamma_t \stackrel{\circ}{=} \Gamma \cap [0, t) \times \Omega$ halmazt. Az elérési idő definíciója alapján $\{\tau_\Gamma < t\} = \mathrm{proj}_\Omega(\Gamma_t)$, ugyanis ha $\tau_\Gamma(\omega) < t$, akkor van olyan s, hogy $(s, \omega) \in \Gamma_t$, vagyis az ω eleme a vetületnek, megfordítva, ha ω eleme a vetületnek, akkor alkalmas $s \in [0, t)$ esetén $(s, \omega) \in \Gamma$, vagyis $\tau_\Gamma(\omega) \leq s < t$. A Γ progresszíven mérhető, ezért $\Gamma_t \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$. Emlékeztetünk, hogy általában valamely szorzatmérhető halmaz vetülete nem lesz mérhető. Az $\mathcal{A}$ a feltétel szerint

[29] Ha $\tau(\omega) = \infty$, akkor ezt úgy interpretáljuk, hogy az ω kimenetelre az τ által leírt esemény nem következik be. Ennek megfelelően $\tau_\Gamma(\omega) \stackrel{\circ}{=} \infty$, ha nincs olyan t, amelyre $(t, \omega) \in \Gamma$. A τ_B típusú jelöléseket különböző helyzetekben eltérő tartalommal fogjuk használni. Ha a B halmaz a folyamat értékkészletének részhalmaza, akkor a τ_B a B találati ideje, ha B az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ részhalmaza, akkor a τ_B kezdőidő. Ha B az Ω részhalmaza, akkor a τ_B a τ megállási idő leszűkítése a B eseményre.

[30] A vetítési tétel és a hozzá kapcsolódó problémák a mértékelmélet valóban nehéz kérdései közé tartoznak és távolról sem természetesek, vagy intuitíve világosak. Számos látszólag egyszerű probléma megoldásakor szembekerülünk avval, hogy mérhető halmazok képét kell vizsgálni. A mérhető függvény definíciója a mérhető halmazok ősképének mérhetőségét biztosítja. Még folytonos függvények esetén is előfordulhat, hogy valamely mérhető halmaz képe nem mérhető. Például két Borel–mérhető halmaz összege nem feltétlenül lesz Borel–mérhető.

teljes, az $\mathcal{F}_t$ a szokásos feltételek teljesülése miatt tartalmazza a nulla halmazokat, ezért az $\mathcal{F}_t$ is teljes, így a vetítési tétel[31] alapján a Γ_t szorzatmérhető halmaz vetülete $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis

$$\{\tau_\Gamma < t\} = \mathrm{proj}_\Omega (\Gamma_t) \in \mathcal{F}_t,$$

Az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos[32], ezért minden gyenge megállási idő megállási idő, vagyis a τ_Γ megállási idő.

□

1.23 Következmény.
Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ kielégíti a szokásos feltételeket, az X folyamat progresszíven mérhető és a B halmaz Borel–mérhető, akkor az (1.3) és az (1.4) kifejezések megállási idők.

1.4. Megállított változók, folyamatok és σ-algebrák

Megállási idők segítségével definiálhatjuk a megállított változókat, folyamatokat és σ-algebrákat. Ezek a fogalmak a sztochasztikus folyamatok elméletének specifikus[33] kategóriái.

1.24 Definíció.
Legyen X sztochasztikus folyamat, τ megállási idő.

1. *Megállított folyamaton az*
$$X^\tau (t, \omega) \overset{\circ}{=} X(\tau(\omega) \wedge t, \omega),$$
esetenként az
$$X^\tau (t, \omega) \overset{\circ}{=} \chi(\tau > 0) X(\tau(\omega) \wedge t, \omega),$$
folyamatot,

2. *megállított változón az*
$$X_\tau (\omega) \overset{\circ}{=} X(\tau(\omega), \omega)$$
változót értjük. Az X_τ helyett legtöbbször a jobban olvasható $X(\tau)$ jelölést fogjuk használni. Vegyük észre, hogy a megállított változó definíciója pontatlan, ugyanis nem világos, hogy amennyiben a folyamat nem terjeszthető ki a $+\infty$ időpontra, akkor mi a megállított változó értéke a $\{\tau = +\infty\}$ halmazon. Ilyenkor szokás az
$$X_\tau (\omega) \overset{\circ}{=} X(\tau(\omega), \omega) \chi(\tau < \infty)(\omega)$$
definícióval élni[34].

3. *Az $\mathcal{F}_\tau$ megállított σ-algebra az olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazokból áll, amelyekre minden t-re*
$$A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

1.25 Példa.
A nulla időpont speciális szerepe a megállított folyamat esetén.

[31] V.ö.: 1.22, tétel, 10. oldal.

[32] Előfordulhat, hogy $(s, \omega) \in \Gamma$, ha $s > t$, de $(t, \omega) \notin \Gamma$. Ilyenkor $\tau_\Gamma(\omega) = t$, de $\omega \notin \mathrm{proj}_\Omega (\Gamma \cap [0, t] \times \Omega)$. A bizonyításban tehát a filtráció jobbról folytonosságát kihasználtuk!

[33] Specifikus abban az értelemben, hogy a mértékelméletben a fogalmaknak nincsen igazán analóg párja.

[34] Amennyiben az X valamilyen játék értéke, és τ a játék befejezésének időpontja, akkor a definíció alapján, ha a játéknak valamely ω kimenetelre soha sincsen vége, akkor a játék nyereménye nulla. A jelölés egyszerűsítés kedvéért a $\chi(\tau < \infty)$ kifejezéssel való szorzást rendszerint elhagyjuk.

Megállási időn legtöbbször a

$$\tau \circeq \inf \{t : |X(t)| \geq a\}$$

típusú szintátlépési időket szokás tekinteni. A τ definiálását követően általában az $|X^{\tau}| \leq a + |\Delta X(\tau)|$ becsléssel szoktunk élni. Nyilván ha a $\tau(\omega) > 0$, akkor az $0 \leq s < \tau(\omega)$ időpontokban az $X(s, \omega) < a$, ugyanis ha nem így lenne, akkor a $\tau(\omega)$ értéke csökkenthető lenne. Az $s = \tau(\omega)$ időpontban lehet a folyamatnak ugrása, így az értéke átlépheti az a szintet, de a maximális eltérés csak az ugrás nagysága lehet. Természetesen, ha a folyamat folytonos, akkor $\Delta X(\tau) = 0$, és ilyenkor $|X^{\tau}| \leq a$. Ez a gondolatmenet azonban nem igaz, ha $\tau(\omega) = 0$. Ha tehát a folyamat már a $t = 0$ időpontban a megadott szint felett indul, akkor az értéke a megállítással nem módosítható. Ezért szokás időnként a definícióban a $\chi(\tau > 0)$ tagot is tekinteni. Ha ugyanis valamilyen kimenetelre $\tau(\omega) = 0$, vagyis a folyamat „kapásból” az a szint felett indul, akkor az ilyen kimenetelekre az értéke nulla lesz, tehát az említett becslés ilyenkor is teljesülni fog.

□

A megállási időkkel, illetve megállított σ-algebrákkal kapcsolatban számos egyszerű állítás, reláció fogalmazható meg. Ezek mindegyikének igazolása néhány sor, de mivel a közel azonos, gyakran igen hasonló tartalmú állítások száma igen nagy, éppen elemi voltuk miatt nem feltétlenül didaktikus őket egy csokorban, előre igazolni. Az olvasónak nem az egyes állításokat, hanem azok igazolásának technikáját célszerű elsajátítani. Éppen ezért a többszörös ismétlésből eredő terjedelemnövekedést elfogadva a megállási időkkel kapcsolatos kisebb észrevételeket a felmerülésük helyén, esetlegesen többször, fogjuk indokolni. Az alábbi állítás a legfontosabb összefüggéseket tartalmazza, és tekinthető az említett elsajátítandó „technika” bemutatásának.

1.26 Állítás.
Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció, τ és σ legyenek megállási idők.

1. *A τ változó $\mathcal{F}_{\tau}$-mérhető.*
2. *Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\mathcal{F}_{\sigma} \subseteq \mathcal{F}_{\tau}$.*
3. *$\mathcal{F}_{\sigma} \cap \mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.*

Bizonyítás: Miként említettük, az összefüggések indokolása a definíciók elemi következménye.

1. Elegendő megmutatni, hogy minden a-re a $\{\tau \leq a\}$ halmaz $\mathcal{F}_{\tau}$-mérhető. Ez az $\mathcal{F}_{\tau}$ definíciója szerint azt jelent, hogy minden t-re

$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Világos, hogy a jobb oldalon álló metszet éppen $\{\tau \leq \min(a, t)\}$. Mivel a τ megállási idő, ezért

$$\{\tau \leq \min(a, t)\} \in \mathcal{F}_{\min(t,a)} \subseteq \mathcal{F}_t$$

ahol az utolsó tartalmazás az $\mathcal{F}$ monotonitásából evidens.

2. Ha $\sigma \leq \tau$, akkor $\{\tau \leq t\} \subseteq \{\sigma \leq t\}$. Ha $A \in \mathcal{F}_{\sigma}$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ugyanis a metszet mindkét tényezője eleme az $\mathcal{F}_t$-nek, így $A \in \mathcal{F}_{\tau}$.

3. Az előző pont alapján $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subseteq \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\sigma}$. Ugyanakkor, ha $F \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\sigma}$, akkor

$$\begin{aligned} F \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} &= F \cap (\{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}) = \\ &= (F \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (F \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

vagyis $F \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

□

A megállási idők specifikus tulajdonsággal rendelkező véletlen időpontok. A definícióban szereplő megkötések célja, hogy a megállási időkkel képzett új folyamatok mérhetőségi, adaptáltsági tulajdonságaik megmaradjanak.

1.27 Állítás.
Ha X progresszíven mérhető és τ tetszőleges megállási idő, akkor az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető, az X^τ megállított folyamat progresszíven mérhető.

Bizonyítás: Az első állítás következik a másodikból, ugyanis ha B Borel–mérhető és X progresszíven mérhető, akkor minden s-re

$$\begin{aligned}\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq s\} &= \{X(\tau \wedge s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} = \\ &= \{X^\tau(s) \in B\} \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s,\end{aligned}$$

ugyanis a metszet mind a két tagja eleme az $\mathcal{F}_t$ eseménytérnek. Vagyis az X_τ megállított változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Tekintsük tehát az állítás második felét. Legyen

$$Y(t,\omega) \overset{\circ}{=} \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ 0 & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases}.$$

Az Y triviálisan jobbról reguláris. A τ megállási idő, így

$$\{Y(t) = 0\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Tehát az Y adaptált, így az Y progresszíven mérhető. Ha $\tau(\omega) > 0$, akkor[35]

$$Z(t,\omega) \overset{\circ}{=} \int_{(0,t]} X(s,\omega) Y(ds,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < \tau(\omega) \\ -X(\tau(\omega),\omega) & \text{ha} \quad t \geq \tau(\omega) \end{cases}.$$

Mivel az X progresszíven mérhető a Z adaptált és jobbról-reguláris, így szintén progresszíveb mérhető. Elemi megfontolással

$$X^\tau = XY - Z + X(0)\chi(\tau = 0),$$

így az X^τ triviálisan progresszíven mérhető[36].

□

1.28 Következmény.
Ha X progresszíven mérhető, τ tetszőleges megállási idő, akkor az X^τ megállított folyamat adaptált.

[35] Ha $\tau(\omega) = 0$ akkor $Z(\omega) = 0$.

[36] Ha a $\chi(\tau > 0)$ tag is szerepel a definícióban, akkor az utolsó kifejezést el lehet hagyni. Mivel egy $\mathcal{F}_0$-mérhető konstansról van szó a $\chi(\tau > 0)$-val való beszorzás nem módosítja a progresszív mérhetőséget.

2. fejezet

Martingálok és a megállási opciókról szóló tétel

A feltételes várható érték és a martingálok fogalmával korábbi tanulmányaink során már megismerkedtünk, így ebben a jegyzetben ismeretüket feltételezzük. A legfontosabb martingálokra vonatkozó állítás a megállási opciókról szóló tétel. A fejezet fő célja ennek a tételnek és alkalmazásainak bemutatása. A martingálelmélet bevezető fejezeteinek célja bizonyos értelemben a megállási opciókról szóló tétel igazolásának előkészítése. A megállási opciókról szóló tétel bizonyítása így igen messze vezetne, és ezért a tétel bizonyítását elhagyjuk.

2.1. Folytonos időparaméterű martingálok definíciója

Emlékeztetünk, hogy egy X adaptált folyamat definíció szerint logikai martingál, ha az $X(t)$ minden t időpontra integrálható, és tetszőleges $s < t$ időpontok esetén teljesül az

$$\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s) \tag{2.1}$$

egyenlőség. Folytonos időhorizonton egy logikai martingált csak akkor tekintünk martingálnak, ha a trajektóriái jobbról regulárisak. Vegyük észre, hogy a feltételes várható érték konstrukciója szerint a feltételes várható érték csak egy nulla valószínűségű halmaz erejéig meghatározott. A martingál, mint sztochasztikus folyamat azonban minden időpontban egy függvény és nem egy valószínűségi változó[1]. Ezért szerepel a (2.1) sorban az egyenlőség felett a m.m. jel. A jobbról reguláris trajektóriák alapvetően azért fontosak, mert a regularitás miatt tetszőleges időpontban az értékük a racionális időpontban felvett értékeik által egyértelműen meg van határozva. Vagyis a regularitás miatt elég ismerni a martingál értékét a racionális időpontokban. A figyelmes olvasó azonnal megjegyezheti, hogy ez a balról reguláris trajektóriák esetén is így van. Valóban ez a helyzett, a pont jobbról és nem balról való regulritás megkövetelése sokkal inkább a megállási opciókról szóló tétel miatt szükséges. Ha a trajektóriákat balról és nem jobbról regularizálnánk akkor a megállási opciókról szóló tétel nem lenne érvényes. Mivel a racionális időpontok megszámlálhatóan sokan vannak, ezért reguláris trajektóriák esetén viszonylag könnyen biztosítható a martingálokkal felírt különböző logikai kifejezések mérhetősége.

2.1 Definíció.
Az X és az Y folyamatok módosítás erejéig egybeesnek, ha minden t-re $X(t) \overset{m.m.}{=} Y(t)$ vagy ami ugyan az minden t-re az $X(t)$ és az $Y(t)$ ugyanazt a valószínűségi változót reprezentálja.

[1] Ugyanis egyébként nem beszélhetnénk a trajektóriákról.

A szokásos feltételek egyik fontos következménye[2], hogy a logikai martingálok és a martingálok a szokásos feltételek teljesülése esetén módosítás erejéig egybeesnek. Másképpen fogalmazva, ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor minden logikai martingálhoz van olyan martingál, amely értékei minden t időpontban majdnem mindenhol megegyeznek a logikai martingál értékeivel. Ezt úgy is ki szokás fejezni, hogy a szokásos feltételek teljesülése esetén a logikai martingálok regularizálhatóak. A továbbiakban mindig a logikai martingálok valamelyik reguláris verzióját tekintjük.

A fogalom pontos megértése céljából tekintsünk néhány alapvető példát:

2.2 Példa.
Ha teljesülnek a szokásos feltételek és ξ tetszőleges integrálható valószínűségi változó, akkor van olyan X martingál, hogy tetszőleges t-re

$$X(t) \overset{m.m}{=} \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

Mivel teljesülnek a szokásos feltételek elegendő belátni, hogy a $t \mapsto \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ bármely verziója[3] logikai martingál. Ha tekintjük a példában definiált X egy tetszőleges verzióját, akkor a torony szabály miatt minden $t > s$ esetén

$$\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s).$$

Vagyis az így kapott változók logikai martingált alkotnak. A szokásos feltételek miatt az idézett tétel alapján a folyamatnak van reguláris verziója, amely már definíció szerint martingált alkot.

□

2.3 Példa.
Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X független növekményű folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható értéke, akkor az

$$Y(t) \triangleq X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

kompenzált folyamat martingál.

A feltételes várható érték elemi tulajdonságai miatt ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y(t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(Y(t) - Y(s) + Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \\ &\overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \\ &\overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} Y(s) \end{aligned}$$

ahol természetesen kihasználtuk, hogy az Y adaptált[4] és független növekményű[5] és az Y növekményeinek várható értéke triviálisan nulla. Ebből következően az Y logikai martingál. Mivel

[2] Az állítást nem bizonyítjuk. A bizonyítása egyrészt messze vezetne, másrészt nem tartalmaz túl sok érdekes és tanulságos megfontolást. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy éppen ez az állítás indokolja a szokásos feltételek megkövetelését.

[3] Emlékeztetünk, hogy egy sztochasztikus folyamat, definíció szerint mindig egy kétváltozós függvény. A feltételes várható érték, szintén definíció szerint, egy valószínűségi változó, vagyis egy ekvivalencia osztály. Ennek megfelelően minden $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ ekvivalencia osztályból ki kell venni egy reprezentánst. A kérdés csak az, hogy ez megtehető-e úgy, hogy a kivett értékek jól, vagyis jobbról reguláris módon, kapcsolódjanak össze. Ehhez szükségesek a szokásos feltételek.

[4] Definíció szerint minden független növekményű folyamat adaptált a téren adott filtrációra. Ha a filtráció nem adott, akkor a folyamatot a saját maga által generált filtráció szerint tekintjük, amelyre nyilván adaptált. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{E}(X(t))$ egy egyszerű determinisztikus függvény, amely a növekmények függetlenségét nem befolyásolja. Az egyetlen kérdés csak az, hogy ez a függvény jobbról reguláris-e?

[5] Ezért hagyható el a feltétel a várható értékből a harmadik sorban.

teljesülnek a szokásos feltételek az Y-nak létezik olyan módosítása, amely jobbról reguláris, vagyis alkalmas $\widehat{Y}$ jobbról regularizált folyamatra mindenh t időpontban

$$\widehat{Y}(t) \overset{m.m.}{=} X(t) - \mathbf{E}(X(t)). \tag{2.2}$$

Definíció szerint minden független növekményű folyamat jobbról reguláris, ezért az $\widehat{Y} - X$ is jobbról reguláris és minden t-re majdnem minden kimenetelre egyenlő az $\mathbf{E}(X(t))$-vel. Tekintsük a racionális időpontokat és az itt levő nulla mértékű halmazokat összevonva egy nulla mértékű halmaztól eltekintve $\widehat{Y}(r,\omega) - X(r,\omega) = \mathbf{E}(X(r))$ minden r racionális szám esetén. A jobb oldalon a jobbról való folytonosság miatt minden t-re

$$\lim_{r\searrow t} \widehat{Y}(r) - X(r) = \widehat{Y}(t) - X(t).$$

Ha most $\lim_{r\searrow t} \mathbf{E}(X(r)) \neq \mathbf{E}(X(t))$ lenne, akkor nem teljesülhetne a (2.2) Ezért egy nulla mértékű halmaztól eltekintve

$$\widehat{Y}(t,\omega) - X(t,\omega) = \mathbf{E}(X(t)).$$

Így az egyenlőség legalább egy ω esetén minden t-re teljesül, így az $\mathbf{E}(X(t))$ függvény szükségszerűen jobbról reguláris, így az Y folyamat is jobbról reguláris.

□

2.4 Példa.
Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X egy Lévy-folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható érték, akkor az

$$Y(t) \overset{\circ}{=} X(t) - t \cdot \mathbf{E}(X(1))$$

kompenzált folyamat martingál.

Emlékeztetünk, hogy a Lévy-folyamatok stacionárius növekményű független növekményű folyamatok. Így csak azt kell belátni, hogy $\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$. A stacionárius növekedés feltétele miatt tetszőleges a időpont és n természetes szám esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X(na)) &= \mathbf{E}(X(na) - X((n-1)a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \\ &= \mathbf{E}(X(a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \cdots = n\mathbf{E}(X(a)). \end{aligned}$$

Ebből

$$n\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathbf{E}(X(1)),$$

így ha $t = p/q$ alakú racionális szám, akkor

$$\mathbf{E}(X(t)) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(X\left(\frac{p}{q}\right)\right) = p\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{q}\right)\right) = \frac{p}{q}\mathbf{E}(X(1)).$$

Mivel az előbbi példa alapján az $\mathbf{E}(X(t))$ jobbról reguláris, ezért tetszőleges t-re $\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$.

□

Emlékeztetünk, hogy ha X egy Poisson-folyamat, akkor az $X(t)$ minden t-re λt paraméterű Poisson-eloszlású változó. Ebből következően $\mathbf{E}(X(t)) = \lambda t$. Így az $X(t) - \lambda t$ folyamat, amelyet kompenzált Poisson-folyamatnak mondunk, martingál. Vegyük észre, hogy most nem volt szükségünk a jobbról való regularitásra, ugyanis a példa speciális jellege miatt az

$$\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$$

azonosság minden további nélkül teljesült.

A martingálelmélet erejét azonban nem az imént bemutatott példák szolgáltatják. Bizonyos értelemben martingálokra a legfontosabb példákat azok a martingálok adják, amelyeket egy várható értékkel rendelkező valószínűségi változók szorzatai hoznak létre. Vagyis nem a nulla várható értékű független valószínűségi változók összegei által generált bolyongások, hanem az egy várható értékkel rendelkező multiplikatív folyamatok mutatják meg a martingálelmélet lényegét. Mivel ezek a martingálok lehetnek akár komplex értékűek is nem egyszerű logaritmikus transzformációról van szó. A legegyeszerűbb példa a következő:

2.5 Példa.
Ha X tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az X-hez tartozó exponenciális martingál valóban martingál.

Tetszőleges t-re definiálhatjuk a

$$\varphi_t(u)) \mathrel{\mathring{=}} \varphi(u,t) \mathrel{\mathring{=}} \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

Fourier-transzformáltakból álló folyamatot. Mivel a Lévy-folyamatok definíció szerint jobbról regulárisak a majorált konvergencia tétele miatt a $\varphi_t(u)$ minden u-ra jobbról reguláris. A független és a stacionárius növekmény feltételét kihasználva

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+s}(u) &\mathrel{\mathring{=}} \mathbf{E}(\exp(iuX(t+s))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s)-X(t)))\exp(iuX(t))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s)-X(t)))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iuX(s))) \cdot \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \mathrel{\mathring{=}} \varphi_t(u) \cdot \varphi_s(u),
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\left|\varphi_{t+s}(u)\right| = |\varphi_t(u)| \cdot |\varphi_s(u)|.$$

Mivel $|\varphi_t(u)| \leq 1$ és $|\varphi_0(u)| = 1$ a Cauchy-féle függvényegyenletből $|\varphi_t(u)| = \exp(t \cdot c(u))$. Ebből következően a $\varphi_t(u)$ soha sem lehet nulla. Ha $t > 0$ és $h > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_t(u) - \varphi_{t-h}(u)\right| &= \left|\varphi_{t-h}(u)\right| \left|\frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-h}(u)} - 1\right| = \\
&= \left|\varphi_{t-h}(u)\right| |\varphi_h(u) - 1| \leq \\
&\leq |\varphi_h(u) - 1| \to 0,
\end{aligned}$$

ha $h \searrow 0$. Következésképpen a $\varphi_t(u)$ balról is folytonos. Tehát a $\varphi_t\ (u)$ minden u-ra a t időváltozóban folytonos. Ennek érdekes következménye, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(iu(X(t) - X(t-))) &= \frac{\varphi_t(u)}{\lim_{h\searrow 0} \varphi_{t-h}(u)} = \\
&= \frac{\varphi_t(u)}{\varphi_{t-}(u)} = 1.
\end{aligned}$$

A Fourier-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást, következésképpen $X(t-) \overset{m.m.}{=} X(t)$. Másképpen fogalmazva Lévy-folyamatok esetén tetszőleges t-re az ugrás valószínűsége nulla. Definíció szerint egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálja

$$Z(t,u,\omega) \mathrel{\mathring{=}} \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi_t(u)}.$$

A Z valóban martingál: ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_t(u)|\mathcal{F}_s) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi_t(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)}\frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)}\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)}\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)}\right) = \\
&= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} \cdot 1
\end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenet igaz ha a $\varphi_t(u)$ Fourier-transzformált helyett az

$$L(t,s) = \mathbf{E}(\exp(-sX(t))), \quad s > 0$$

Laplace-transzformálttal osztunk, vagyis az

$$\frac{\exp(-sX(t))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(t)))}, \quad s > 0$$

transzformáltat tekintjük. Ez akkor hasznos, ha az X nem negatív, ugyanis ilyenkor minden $s \geq 0$ esetén véges a nevezőben szereplő várható érték.

□

2.6 Példa.
Wiener-folyamatok exponenciális martingálja.

Ha w Wiener-folyamat, akkor a $w(t)$ eloszlása, a Wiener-folyamat definíciója szerint, $N\left(0,\sqrt{t}\right)$. Iyenkor a standard normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képlete szerint

$$\begin{aligned}
\varphi_t(u) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(N\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\sqrt{t}\,(N(0,1))\right)\right) = \exp\left(-\frac{\left(u\sqrt{t}\right)^2}{2}\right) = \\
&= \exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Így

$$Z(t,u) = \exp\left(iuw(t) + t\frac{u^2}{2}\right).$$

Ha a Fourier-transzformált helyett a Laplace-transzformáltat vesszük, akkor

$$Z(t,s) = \exp\left(-sw(t) - t\frac{s^2}{2}\right).$$

□

2.2. A megállási opciókról szóló tétel

A megállási opciókról szól tételnek két alakja van. Az első alakban fel kell tenni, hogy a megállási idők korlátosak.

2.7 Tétel. (Megállási opciókról szóló tétel)
Legyen $(X, \mathcal{F})$ martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ megállási idők. Ha a τ_1, τ_2 megállási idők korlátosak, vagyis ha van olyan c konstans, hogy $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c$, akkor

$$X(\tau_1) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}).$$

A megállási opciókról szóló tétel azt mondja ki hogy a martingálokat definiáló egyenlőségbe determinisztikus időpontok helyébe korlátos megállási idők is írhatóak.

2.8 Definíció.
Tetszőleges X sztochasztikus folyamat valamely a ponthoz tartozó τ_a találati idején a

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : X(t) = a\}$$

megállási időt értjük.

2.9 Példa.
A megállási opciókról szóló tételben a megállási idő korlátossága fontos.

Legyen w egy Wiener-folyamat és jelölje τ az $a = 1$ pont találati idejét. Mivel a w folytonos és majdnem minden kimenetelre a w trajektóriái nem korlátosak, ezért egy valószínűséggel minden trajektória előbb vagy utóbb átmetszi az $a = 1$ szintet. Így egy valószínűséggel $\tau < \infty$. Világos, hogy ebből $w(\tau) \stackrel{m.m.}{=} 1$ és így

$$\mathbf{E}(w(\tau)) = 1 > 0 = \mathbf{E}(w(0)),$$

ami miatt a megállási opciókról szóló tétel a $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$ szereposztással nem alkalmazható.

□

Ha a megállási opciókról szóló tételt nem korlátos martingálokra is alkalmazni akarjuk, akkor az állításban szereplő martingálokról kell feltenni, hogy valamilyen értelemben korlátosak.

2.10 Definíció.
Egy (X, A, μ) téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_\alpha \int_{|f_\alpha|\geq N} |f_\alpha|\, d\mu = 0.$$

Az egyenletes integrálhatóság fontossága a következő tételre épül:

2.11 Állítás.
Ha a μ mérték véges, az (f_n) függvények halmaza egyenletesen integrálhatóak, és $f_n \to f$, akkor az f is integrálható, és

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu, \quad \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Világos, hogy ha f egy integrálható függvény, akkor a majorált konvergenciáról szóló tétel miatt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|f|\geq N} |f|\, d\mu = 0.$$

Így minden véges számú integrálható függvényből álló halmaz egyenletesen integrálható. Valamivel érdekesebb a következő példa:

2.12 Példa.
Ha a $\sup_\sigma |f_\alpha|$ mérhető és $\sup_\sigma |f_\alpha| \in L^p(\Omega)$, ahol $p \geq 1$, akkor az $(f_a)_\alpha$ család egyenletesen integrálható.

Ha $p = 1$, akkor az (f_a) családnak triviálisan van integrálható majoránsa: A definícióból világos, hogy ha egy $\mathcal{A}$ halmaznak van integrálható majoránsa, akkor az $\mathcal{A}$ halmaz triviálisan egyenletesen integrálható. Általában az L^p-norma monotonitása miatt minden $p \geq 1$ esetén

$$\|f_\alpha\|_p \leq \left\| \sup_\sigma |f_\alpha| \right\|_p ,$$

így az (f_a) korlátos az L^p térben. Meg lehet mutatni, hogy ha $p > 1$, akkor az L^p térben való korlátosságból következik az egyenletes integrálhatóság. Hangsúlyozni kell, hogy a $p = 1$ esetben ez nem igaz, tehát lehet példát mutatni, olyan L^1-ben korlátos halmazra, amely nem egyenletesen integrálható[6].

□

2.13 Példa.
Ha ξ tetszőleges integrálható változó, és $(\mathcal{F}_\alpha)$ tetszőleges σ-algebrákból álló halmaz, akkor az

$$\eta_\alpha \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_\alpha)$$

család egyenletesen integrálható.

2.14 Definíció.
Egy X martingált egyenletesen integrálható martingálnak mondunk ha az X értékeiből álló halmaz, vagyis az $(X_t)_t$ halmaz egyenletesen integrálható.

A martingálkonvergencia tételek között talán a legnevezetesebb a következő:

2.15 Tétel.
Legyen X egy martingál az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen.

1. *Ha az X korlátos az $L^1(\Omega)$ térben[7], akkor van olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$, hogy majdnem minden kimenetelre $\lim_{t \nearrow \infty} X(t) = X(\infty)$.*
2. *Ha az X ezen kívül még egyenletesen is integrálható, akkor a konvergencia $L^1(\Omega)$-ban is érvényes[8].*

2.16 Tétel. (Megállási opciókról szóló tétel)
Legyen $(X, \mathcal{F})$ egy egyenletesen integrálható martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ tetszőleges megállási idők. Ekkor

$$X(\tau_1) \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}).$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben a τ_1 és τ_2 megállási idők felvehetik a $+\infty$ értéket is. Ugyanis miként jeleztük, ha az X egyenletesen integrálható martingál, akkor az

$$X(\infty) \stackrel{\circ}{=} \lim_{t \to \infty} X(t)$$

határérték értelmes és így az X definíciója értelemszerű módon kiterjeszthető a $t = \infty$ időpontra is, és így az $X(\tau)$ megállított változónak akkor is van értelme, ha a τ a $+\infty$ értéket vette fel valamilyen kimenetelre. Érdemes hangsúlyozni, hogy az imént kimondott tétel miatt a $t = \infty$

[6] A legegyszerűbb idevágó példa, a nullára húzódó egy területű háromszögek nevezetes példája arra, hogy az integrál nem cserélhető fel a határátmenettel. A példában a háromszögek alapja a $[0, 1/n]$ szakasz, a háromszögek magassága $2n$. Így a háromszögek területe végig egy. Mivel a sorozat határértéke a nulla függvény, ilyenkor a határérték és az integrálás nem cserélhető fel, így a sorozat nem lehet egyenletesen integrálható, bár korlátos L^1-ben. Ugyanakkor például a sorozat L^2-normája nyilvánvalóan nem korlátos.

[7] Vagyis van olyan c, hogy $\|X(t)\|_1 \leq c$ minden t-re. Miként jeleztük $L^1(\Omega)$-ban a korlátosság gyengébb feltétel mint az egyenletes integrálhatóság.

[8] V.ö.: 2.11. állítás, 2.11. oldal. Valószínűségszámítási szempontból az első pont érdekes, a tétel második fele már következik az idézett általános mértékelméleti megfontolásból.

időpontra való kiterjesztés az $L^1(\Omega)$ topológiájában folytonosan valósítható meg és a kiterjesztett folyamat a $[0,\infty]$ időtartományon martingál marad[9]. Speciálisan minden t időpontra

$$X(t) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t).$$

Megmutatható[10], hogy egy X martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha a fenti tulajdonsággal rendelkező $X(\infty)$ létezik. A megállási opciókról szóló tételben a megállási idők korlátosságának feltétele, illetve a martingál egyenletes integrálhatóságának feltétele lényegében azonos megkötés. Valamely martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha értelmezhető a $[0,\infty]$ zárt szakaszon, amely rendezési és topológiai szempontból ekvivalens mondjuk a korlátos $[0,1]$ szakasszal.

2.17 Tétel. (Martingálok és a várható érték megmaradása)
Egy X jobbról reguláris és adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha minden τ korlátos megállási időre $X(\tau) \in L^1(\Omega)$ és $\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(X(0))$. Az egyenlőség pontosan akkor igaz minden megállási időre, ha az X egyenletesen integrálható martingál.

Bizonyítás: Ha az X martingál, illetve egyenletesen integrálható martingál, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt az állítás teljesül[11]. Vegyük az $s < t$ időpontokat és legyen $A \in \mathcal{F}_s$. A megállási idő definíciója alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\tau = t\chi_{A^c} + s\chi_A \tag{2.3}$$

megállási idő. A feltétel szerint

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X_\tau) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(s)\chi_A).$$

De a $\tau \equiv t$ szintén megállási idő, tehát

$$\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}(X(t)\chi_{A^c}) + \mathbf{E}(X(t)\chi_A).$$

A két oldalt összehasonlítva $\mathbf{E}(X(s)\chi_A) = \mathbf{E}(X(t)\chi_A)$, vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s).$$

Felhasználva, hogy az adaptáltság miatt az $X(s)$ $\mathcal{F}_s$-mérhető $X(s) = \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s)$. Ha minden megállási idő megengedett, akkor a feltétel szerint az $X(\infty)$ létezik és integrálható, valamint a (2.3) sorban a $t = \infty$ megengedett, következésképpen az X egyenletesen integrálható.

□

2.18 Tétel. (Martingál megmaradási tétel)
Ha X martingál, és τ megállási idő[12], akkor az X^τ megállított folyamat is martingál.

Bizonyítás: Ha az X jobbról reguláris, akkor az X^τ megállított folyamat is jobbról reguláris. Miként az általános elmélet tárgyalásakor láttuk, az X^τ megállított folyamat adaptált marad. Legyen ϕ korlátos megállási idő. A $\upsilon \doteq \min(\phi,\tau)$ szintén korlátos. Mivel

$$\{\upsilon \le t\} = \{\phi \le t\} \cup \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ezért a υ is megállási idő.

$$\mathbf{E}(X^\tau(\phi)) = \mathbf{E}(X(\upsilon)) = \mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X^\tau(0)),$$

következésképpen az előző állítás miatt az X^τ martingál.

□

[9] Ugyanis a feltételes várható érték felcserélhető az $L^1(\Omega)$ térben való konvergenciával. (De nem feltétlenül a majdnem mindenhol való konvergenciával!!)
[10] V.ö.: 2.13. példa, 20. oldal.
[11] Elegendő mind a két oldalon várható értéket venni és kihasználni a toronyszabályt.
[12] Vegyük észre, hogy a τ-nak most nem kell korlátosnak lenni.

2.19 Példa.
A martingálok jobbról való folytonossága lényeges, illetve az egyenletes integrálhatóság feltétele nem hagyható el.

Legyen P egy λ paraméterű Poisson-folyamat[13] és legyen $\pi(t) \stackrel{\circ}{=} P(t) - \lambda t$ az úgynevezett kompenzált Poisson-folyamat. Miként láttuk a π martingál. Ha a folyamatot nem jobbról, hanem balról tesszük folytonossá, és a $\tau > 0$ a folyamat első ugrásának az időpontja, és $N > 0$, akkor a $T \stackrel{\circ}{=} \tau \wedge N > 0$ egy korlátos megállási idő, de

$$\mathbf{E}(\pi(0)) = 0 < \mathbf{E}(-\lambda T) = \mathbf{E}(P_T - \lambda T) = \mathbf{E}(\pi_T).$$

Az egyenletes integrálhatóság nem teljesülésérére a legegyszerűbb példa a duplázó stratégia a fej-vagy írás játékban. Ilyenkor a kilépéskori várható nyereség 1, míg az egyes lépések várható nyeresége 0. De jó példa egy w Wiener-folyamat

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : w(t) = a\}$$

találati ideje. Ilyenkor

$$\mathbf{E}(w(\tau_a)) = \mathbf{E}(a) = a \neq 0 = \mathbf{E}(w(0)).$$

□

2.20 Példa.
Ha $a < 0 < b$ és w egy Wiener-folyamat, akkor a w folyamat τ_a és τ_b találati idejére

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{-a}{b-a}.$$

A Wiener–folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel nem korlátosak, tehát majdnem minden az origóból kiinduló trajektória valamelyik oldalon kilép az $[a,b]$ szakaszból, tehát

$$\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = 1.$$

Ha $\tau \stackrel{\circ}{=} \min(\tau_a, \tau_b)$, akkor a w^τ korlátos martingál, ugyanis $a \le w^\tau \le b$. Minden korlátos martingál triviálisan egyenletesen integrálható. Így alkalmazhatjuk a megállási opciókról szóló tételt. A w_τ^τ vagy a, vagy b, ennek megfelelően

$$\mathbf{E}(w_\tau^\tau) = a\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + b\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \mathbf{E}(w^\tau(0)) = 0.$$

Két egyenletünk van két ismeretlennel, amit megoldva éppen a keresett összefüggéseket kapjuk[14].

□

2.21 Példa.
Valamely Wiener-folyamat valamely a időponthoz tartozó τ_a találati idejének Laplace-transzformáltja

$$L(s) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(-s\tau_a)) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right), \quad s \ge 0.$$

[13] A példa szempontjából elég azt tudni, hogy a Poisson-folyamat diszkrét időpontokban beérkező véletlen események számát adja meg. Az egyes ugrások között eltelt idő λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A folyamat stacionárius és független növekményű. A t időpontban beérkező ugrást definíció szerint hozzászámoljuk a folyamathoz, ezért a folyamat jobbról folytonos. Egyszerűen belátható, hogy $\lambda t = \mathbf{E}(P(t))$. Az, hogy a t időpontban bekövetkezett ugrásokat beszámítjuk, vagy sem, nem módosítja a folyamat által generált kibővített filtrációt, vagy a megállási időket, ugyanis az, hogy a t időpontban ugrás lesz nulla valószínűségű esemény.

[14] A számolásban kiindulhatunk a $\sigma_n \stackrel{\circ}{=} \tau \wedge n$ korlátos megállási időkből, alkalmazhatjuk a w martingálra a megállási opciókról szóló tételt, korlátos megállási idő esetén. Ezt követően n-nel tarthatunk a végtelenbe és kihasználhatjuk, hogy $a \le w(\sigma_n) \le b$.

Legyen $a > 0$. A Laplace-transzformálttal képzett

$$X(t) \triangleq \exp\left(sw(t) - s^2\frac{t}{2}\right)$$

exponenciális martingál, miként láttuk, valóban martingál, ezért az X^{τ_a} megállított folyamat is martingál. Ha $s \geq 0$, akkor

$$0 \leq X^{\tau_a}(t) \leq \exp\left(sa - \frac{s^2 t}{2}\right) \leq \exp(as),$$

ezért az X^{τ_a} korlátos martingál. Minden korlátos martingál egyenletesen integrálható[15], így alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel, tehát

$$\mathbf{E}\left(X^{\tau_a}_{\tau_a}\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(sa - \frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right) = \mathbf{E}\left(X^{\tau_a}(0)\right) = 1,$$

amiből

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right) = \exp(-sa).$$

Egyszerű helyettesítéssel, ha $s \geq 0$

$$L(s) \triangleq \mathbf{E}\left(\exp(-s\tau_a)\right) = \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

Ha $a < 0$, akkor a $-w$ Wiener-folyamatra és az $|a| = -a > 0$ pontra megismételve a számolást

$$L(s) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right).$$

□

2.22 Példa.
Mutassuk meg, hogy a τ_a sűrűségfüggvénye

$$f(x) \triangleq \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right), \quad x > 0. \tag{2.4}$$

Csak az $a > 0$ esettel foglalkozunk az $a < 0$ eset a Wiener-folyamatok szimmetriája miatt visszavezethető az $a > 0$ esetre. Mivel az eloszlás a nem negatív számokra koncentrálódik, ezért az

$$L(s) \triangleq \int_0^\infty \exp(-sx) f(x)\,dx, \quad s \geq 0$$

valós Laplace-transzformált értelmes. Megmutatjuk, hogy az éppen a τ_a előbb kiszámolt Laplace-transzformáltjával azonos. Mivel nem negatív változók esetén a Laplace-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk. Megjegyezzünk, hogy a (2.4) F eloszlásfüggvényére érvényes a következő képlet:

$$F(x) \triangleq \int_0^x f(t)\,dt = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)du, \tag{2.5}$$

ugyanis az első integrálban $t = xa^2/u^2$ helyettesítést végezve

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_\infty^a \frac{au^3}{a^3\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)xa^2(-2)u^{-3}du = \\ &= 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right)du. \end{aligned}$$

[15] Hiszen az abszolút érték szuprémuma integrálható.

Parciálisan integrálva, és felhasználva, hogy $F(0) = 0$, ha $s > 0$

$$\begin{aligned} L(s) &= [\exp(-sx) F(x)]_0^\infty + \int_0^\infty s \exp(-sx) F(x)\, dx = \\ &= s \int_0^\infty \exp(-sx) F(x)\, dx. \end{aligned}$$

A (2.5) összefüggést behelyettesítve

$$L(s) = 2s \int_0^\infty \exp(-sx) \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right) du dx.$$

Az $L(s)$ függvényt rögzített s esetén tekinthetjük az a változó függvényének. Jelöljük ez $g(a)$-val. Megmutatjuk, hogy ha $a > 0$, akkor a $g(a)$-ra teljesül a

$$g''(a) = 2sg(a) \tag{2.6}$$

differenciálegyenletet. Az integrálban szereplő integrandus nem negatív, tehát Fubini-tétele alapján az integrálás határai felcserélhetőek, vagyis

$$g(a) = 2s \int_a^\infty \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{u^2}{2x}\right) dx du.$$

A belső integrál az u paraméter folytonos függvénye, mivel az

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-sx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) < \infty$$

és ezért az $1/\sqrt{2\pi x} \exp(-sx)$ az integrandus integrálható majoránsa. Ezt felhasználva

$$g'(a) = -2s \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) dx.$$

A második derivált kiszámolásakor „bederiválhatunk” az integrál jel mögé ugyanis a

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right)\right) = \exp(-sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right)\left(-\frac{2a}{2x}\right)$$

parciális deriváltnak az

$$\exp(-sx) \frac{c}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2x}\right)$$

az $a \in (b, c)$ intervallumon integrálható majoránsa.

$$g''(a) = 2s \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) dx = 2sg(a).$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 2s = 0$, amiből $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2s}$, tehát az általános megoldás

$$A \exp\left(a\sqrt{2s}\right) + B \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

De mivel $L(0) = A + B = 1$, $L(\infty) = 0$, ami alapján

$$L(s) = \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

□

3. fejezet

Poisson-folyamat

A Poisson-folyamat a Wiener-folyamat mellett a leggyakrabban használt folyamat. Ebben a fejezetben a legegyszerűbb tulajdonságatit foglaljuk össze.

3.1. Lévy-folyamatok

Először a Lévy-folyamatok osztályát definiáljuk:

3.1 Definíció.
Az X sztochasztikus folyamat

1. *független növekményű, ha minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpont sorozatra az*

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_k) - X(t_{k-1}), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

   növekmények függetlenek,

2. *stacionárius növekményű, ha $t > s$ esetén az $X(t) - X(s)$ eloszlása megegyezik az $X(t-s) - X(0)$ eloszlásával.*

Ha a folyamathoz rendelt[1] *$\mathcal{F}$ filtráció adott, akkor a folyamatot független növekményűnek mondjuk, ha minden t-re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrától. A X folyamat Lévy-folyamat, ha*

1. *$X(0) = 0$,*
2. *az X független és stacionárius növekményű, és*
3. *a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.*

3.2 Példa.
A legegyszerűbb Lévy-folyamatok.

A legegyszerűbb Lévy-folyamat az azonosan nulla folyamat. Ez a folyamat nyilván martingál is. Tetszőleges konstans értékű folyamat martingál, de nyilván csak akkor Lévy-folyamat, ha a konstans értéke nulla. Minden at alakú egyszerű lineáris trend Lévy-folyamat, de csak akkor lesz martingál, ha az a értéke nulla. Az $at + b$ alakú lineáris függvény általában sem nem martingál, sem nem Lévy-folyamat[2].

□

A Lévy-folyamatok legfontosabb tulajdonsága a folyamatok úgynevezett erős Markov-tulajdonsága:

[1] Értelemszerűen a folyamat adaptált a hozzárendelt filtrációra nézve. Miként később látni fogjuk, a filtráció bővebb mint a folyamat által generált filtráció.

[2] Viszont szemimartingál.

3.3 Állítás.
Ha $\tau < \infty$ egy tetszőleges megállási idő, X egy tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az

$$X^*(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} X(\tau(\omega)+t,\omega) - X(\tau(\omega),\omega), \quad t \geq 0,$$

újraindított folyamat[3] *eloszlásban megegyezik az X-szel, és az X^* Lévy-folyamat az $\mathcal{F}_t^* \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}_{\tau+t}$ filtrációra nézve. Speciálisan az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ halmaz független az $\mathcal{F}_\tau$ megállított σ-algebrától.*

Bizonyítás: Miként beláttuk, a megállított változók mérhetők a megállított σ-algebrára nézve. Így az $X(\tau+t)$ változó adaptált az $\mathcal{F}_{\tau+t}$ σ-algebrára nézve. Mivel ha megállási idő nagyobb, akkor a σ-algebra is nagyobb, így az $X(\tau)$ is mérhető az $\mathcal{F}_{\tau+t}$ σ-algebrára nézve. Így **az** X^* evidens módon adaptált az $\mathcal{F}^*$ filtrációra és az X^* triviálisan jobbról reguláris.

A lényeges állítás az, hogy az újraindított folyamat és az eredeti folyamat eloszlása megegyezik. Emlékeztetünk, hogy két folyamat eloszlásának azonosságán a véges számú időpontok által meghatározott eloszlások azonosságát értjük. Vagyis azt kell megmutani, hogy tetszőleges $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontok esetén az

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$$

vektor és az

$$(X^*(t_1), X^*(t_2), \ldots, X^*(t_n))$$

vektor eloszlása azonos. Két eloszlás azonosságát legegyszerűbben a Fourier-transzformáltjuk azonosságával igazolhatjuk. A Fourier-transzformáltak azonosságának bizonyítását visszavezetjük a megállási opciókról szóló tételre. A

$$Z(t,u,\omega) \stackrel{\circ}{=} \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\mathbf{E}(\exp(iuX(t,\omega)))} \stackrel{\circ}{=} \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi(t,u)}$$

exponenciális martingál minden u-ra martingál. Ha a τ korlátos megállási idő, akkor

$$\mathbf{E}(Z_{\tau+t}(u) \mid \mathcal{F}_\tau) = Z_\tau(u),$$

és mivel $Z \neq 0$

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = 1. \tag{3.1}$$

A független és stacionárius növekmény feltétele miatt

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+s}(u) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t+s,\omega))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s,\omega)-X(s,\omega)))\exp(iuX(s,\omega))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s,\omega)-X(s,\omega))))\,\mathbf{E}(\exp(iuX(s,\omega))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t,\omega))))\,\mathbf{E}(\exp(iuX(s,\omega))) = \\
&= \varphi_t(u)\,\varphi_s(u).
\end{aligned}$$

Ebből speciálisan $\varphi_t(u) \neq 0$ minden u-ra és t-re[4]. Ez, és az imént belátott szorzat alakra bonthatóság alapján minden ω kimenetelre ha $s \stackrel{\circ}{=} \tau(\omega)$, akkor

$$\frac{\varphi_{\tau(\omega)}(u)}{\varphi_{\tau(\omega)+t}(u)} = \frac{1}{\varphi_t(u)}.$$

Így minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ halmazra az X^* definíciója és a (3.1) alapján, felhasználva, hogy $\varphi_t(u) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_A \exp(iuX^*(t))\,d\mathbf{P} &= \varphi_t(u)\int_A \frac{\exp(iu(X(\tau+t)-X(\tau)))}{\varphi_t(u)}d\mathbf{P} = \\
&= \varphi_t(u)\int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau}d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)\,\varphi_t(u).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

[3] A $\tau < \infty$ miatt az X^* értelmes.

[4] Ugyanis minden u-ra a $\varphi_t(u)$ $c(u)\exp(\lambda(u)t)$ alakú, ahol a $c(u)$ nem lehet nulla, hiszen $\varphi_0(u) = 1$.

Az egyenlőség minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén teljesül. Ezt az egyenlőséget természetesen csak korlátos megállási időkre igazoltuk. Most kiterjesszük minden véges megállási időre. Ha $\tau < \infty$ egy tetszőleges megállási idő, és $\tau_n \triangleq \min(n, \tau)$, akkor evidens módon minden kimenetelre

$$X(\tau_n + t) - X(\tau_n) \to X(\tau + t) - X(\tau) = X^*(t). \tag{3.3}$$

Ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ugyanis ha $t \leq n$, akkor

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq t\} \subseteq \{\tau \leq n\},$$

és így

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} &= A \cap \{\tau_n \leq t\} = \\ &= A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

ha pedig $t > n$, akkor $\{\tau_n \leq t\} = \Omega$ és

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} = A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Ebből a megállított σ-algebra definíciója miatt

$$A_n \triangleq A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}. \tag{3.4}$$

Így ha $A_n \in \mathcal{F}_{\tau_n}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n)\varphi_t(u) &= \int_{A_n} \exp(iu(X(\tau_n + t)) - X(\tau_n))\, d\mathbf{P} = \\ &= \int_A \chi(\tau \leq n) \exp(iu(X(\tau_n + t)) - X(\tau_n))\, d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor a (3.3) és a majorált konvergencia tétel miatt a (3.2) sor kiterjeszthető véges értékű τ megállási időkre.

Ha $A = \Omega$, akkor az (3.2) sor miatt az $X^*(t)$ Fourier-transzformáltja φ_t, vagyis a $X^*(t)$ és a $X(t)$ eloszlása megegyezik.

Legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos f függvények halmaza, amelyekre

$$\int_A f(X^*(t))\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) \int_\Omega f(X(t))\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) \int_\Omega f(X^*(t))\, d\mathbf{P},$$

ahol $A \in \mathcal{F}_\tau$. Nyilvánvalóan az $\mathcal{L}$ λ-rendszer, és az $\mathcal{L}$ tartalmazza az

$$x \mapsto \exp(iux), \quad u \in \mathbb{R}$$

trigonometrikus polinomok π-rendszerét. A monoton osztály tétel alapján az $\mathcal{L}$ tartalmazza a $\{\chi_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ alakú függvényeket. Emlékeztetünk, hogy definíció szerint egy ξ változó független egy σ-algebrától, ha minden B Borel-mérhető halmaz esetén a $\xi^{-1}(B)$ esemény független a σ-algebra minden halmazától. Ez elmondottak alapján minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén ha $\xi \triangleq X^*(t)$ és $f \triangleq \chi_B$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A \cap \xi^{-1}(B)\right) &= \int_A \chi_B(\xi)\, d\mathbf{P} \triangleq \int_A f(X^*(t))\, d\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P}(A) \int_\Omega f(X^*(t))\, d\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P}(A) \int_\Omega \chi_B(\xi)\, d\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}\left(\xi^{-1}(B)\right) d\mathbf{P}, \end{aligned}$$

tehát a $X^*(t)$ független az A-tól és így az $\mathcal{F}_\tau$-tól.

Meg kell mutatni, hogy a X^* stationárius és független növekményű.

$$\begin{aligned} X^*(t+h) - X^*(t) &\overset{\circ}{=} (X(\tau+t+h) - X(\tau)) - (X(\tau+t) - X(\tau)) = \\ &= X(\tau+t+h) - X(\tau+t). \end{aligned}$$

A tétel már belátott részét alkalmazva a $\tau + t$ megállási időre[5]

$$X(h) \cong X(\tau+t+h) - X(\tau+t),$$

amely független t-től, tehát a X^* stacionárius növekményű. Ugyancsak a tétel már belátott része alapján a $X^*(t+h) - X^*(t)$ független az $\mathcal{F}_t^* \overset{\circ}{=} \mathcal{F}_{\tau+t}$ σ-algebrától, vagyis a X^* független növekményű.

Érdemes hangsúlyozni, hogy csak az egydimenziós eloszlások azonosságát láttuk be. Az $uX^*(t)$ helyébe mindenhol az $\sum_{i=1}^n u_i X^*(t_i)$ összeget írva analóg módon belátható, hogy a X^* folyamat $(X^*(t_1), \ldots, X^*(t_n))$ véges dimenziós eloszlásai is megegyeznek a X megfelelő eloszlásaival. Speciálisan véges sok t_k időpont esetén a $(X^*(t_k))$ független az $\mathcal{F}_\tau$-tól, így a $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ is független az $\mathcal{F}_\tau$-tól.

□

Az erős Markov-tulajdonság a Lévy-folyamatok legfontosabb tulajdonsága. A későbbiekben számtalanszor szükségünk lesz rá. Első alkalmazásként tekintsük a következőt:

3.4 Állítás.
Ha valamely X Lévy-folyamat ugrásai kisebbek egy fix $c > 0$ konstansnál, vagyis $|\Delta X| \leq c$, akkor tetszőleges $[0,t]$ véges szakaszon az X momentumainak halmaza egyenletesen korlátos. Vagyis minden m kitevőhöz és $[0,t]$ szakaszhoz létezik olyan $k(m,t)$ korlát, hogy

$$\mathbf{E}(|X^m(s)|) \leq k(m,t), \quad s \in [0,t].$$

Bizonyítás: Mivel a trajektóriák regulárisak, ezért a trajektóriák mindegyike minden véges és zárt szakaszon korlátos[6]. Ebből következően az az esemény, hogy valamely trajektória korlátos eleme a farok σ-algebrának[7]. A nulla vagy egy törvény miatt a farok σ-algebra eseményei nulla vagy egy valószínűségűek. Így az olyan trajektóriák halmaza, amely korlátos nulla vagy egy valószínűséggel bír: Tekintsük a $\xi_n \overset{\circ}{=} X(n+1) - X(n)$ független valószínűségi változókat. A

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right| = \infty$$

esemény biztosan eleme a farok σ-algebrának[8] ezért nulla, vagy egy valószínűségű. Ha nulla valószínűségű lenne, akkor a folyamathoz hozzáadva a $Z(t) = t$ lineáris trendet, nyilván egy valószínűséggel korlátlan trajektóriájú Lévy-folyamatot kapunk. Nyilván az X és az $X + Z$ momentumai minden véges szakaszon egyszerre korlátosak, vagy korlátlanok. Feltehetjük tehát, hogy az X trajektóriái nem korlátossak. Tekintsük a

$$\tau_1 \overset{\circ}{=} \inf\{t : |X(t)| > c\}$$

[5] Értelemszerűen az $\cong$ jel jelöli a reláció két oldalán szereplő változók eloszlásának azonosságát.

[6] Persze szó sincsen egyenletes korlátosságról.

[7] A farok σ-algebra elemei azok az események, amelyek nem függnek véges sok elemtől. Ha $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ valószínűségi változók egy halmaza és a ϕ az A véges elemű részhalmazaiból álló halmaz, akkor az $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ farok σ-algebrája $\mathcal{G} \overset{\circ}{=} \cap_{x \in \phi} \sigma\left((\xi_\alpha)_{\alpha \in x}\right)$. A Kolmogorov-féle nulla vagy egy törvény szerint ha a (ξ_α) változók függetlenek és $F \in \mathcal{G}$, akkor az F valószínűsége nulla vagy egy.

[8] Ugyanis véges sok tagot mindig elhagyhatunk az összegből anélkül, hogy a $\pm\infty$-hez való konvergenciát módosítanánk.

megállási időt. Mivel a trajektóriák a teljes számegyenesen egy valószínűséggel korlátlanok $\tau_1 < \infty$ majdnem mindenhol. Így tekinthetjük az X^* újraindított folyamatot. Legyen

$$\tau_2 \triangleq \inf \{t : |X^*(t)| > c\} + \tau_1 \triangleq \inf \{t : |X(t+\tau_1) - X(\tau_1)| > c\} + \tau_1.$$

Hasonló módon definiálhatjuk az τ_3 stb. megállási időket. Az erős Markov-tulajdonság miatt az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók függetlenek az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ σ-algebrától. A

$$\tau_2 - \tau_1 \triangleq \inf \{t \geq 0 : |X^*(t)| > c\}$$

mérhető az $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ változók által generált σ-algebrára, így a $\tau_2 - \tau_1$ független az $\mathcal{F}_{\tau_1}$-től. Hasonlóan a $\tau_n - \tau_{n-1}$ független az $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$-től. Ugyancsak az erős Markov-tulajdonság miatt $\tau_n - \tau_{n-1}$ eloszlása minden n-re megegyezik a τ_1 eloszlásával. Így a $\tau_0 \triangleq 0$ értékből kiindulva és használva a $(\tau_k - \tau_{k-1})$ változók függetlenségét

$$\mathbf{E}(\exp(-\tau_n)) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}(\tau_k - \tau_{k-1})\right)\right) = (\mathbf{E}(\exp(-\tau_1)))^n \triangleq q^n,$$

ahol $0 < q \leq 1$. Ha $q = 1$ akkor $\tau_1 = 0$, így a jobbról való folytonosság miatt $|X(0)| \geq c > 0$, ami ellentmond a Lévy-folyamatok definíciójának, így $q < 1$. Szigorúan a τ_1 előtt az X nem lehet nagyobb mint c, ugyanis ellenkező esetben a τ_1 csökkenthető lenne. Így $|X(\tau_1-)| \leq c$. Az ugrások kisebbek mint c, így

$$\begin{aligned} |X(\tau_1)| &= |X(\tau_1-) + \Delta X(\tau_1)| \leq |X(\tau_1-)| + |\Delta X(\tau_1)| \leq \\ &\leq |X(\tau_1-)| + c \leq 2c. \end{aligned}$$

Hasonlóan folytatva

$$\sup_t |X^{\tau_n}(t)| = \sup |\{X(t) : t \in [0, \tau_n]\}| \leq 2nc.$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X(t)| > 2nc) &\leq \mathbf{P}(\tau_n < t) = \mathbf{P}(\exp(-\tau_n) > \exp(-t)) \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(\exp(-\tau_n))}{\exp(-t)} \leq \exp(t)\, q^n. \end{aligned}$$

Mivel $q < 1$, ezért

$$h(m) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m q^n < \infty.$$

Az $|X(t)|^m$ függvényt egy lépcsős függvénnyel felülről közelítve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X(t)|^m) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m \cdot \mathbf{P}(|X(t)| > 2nc) \leq \\ &\leq \exp(t) \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)c]^m q^n \triangleq \exp(t)\, h(m), \end{aligned}$$

amiből az állítás evidens.

□

3.2. Poisson-folyamatok

3.5 Definíció.
Poisson-folyamat alatt, definíció szerint, olyan monoton növekedő trajektóriákkal rendelkező Lévy-folyamatot értünk, amely értékkészlete majdnem minden ω kimenetelre a $\{0, 1, 2, \cdots\}$ egész számok

halmaza. Hangsúlyozni kell, hogy az imént megadott definíció szerint, minden kimenetelre az $\mathbb{N}$ összes eleme felvételre kerül, vagyis nincsenek a folyamatnak egynél nagyobb ugrásai. Ennek megfelelően a Poisson-folyamatok éppen a Lévy-típusú számláló folyamatok[9].

Mivel a folyamat értékei egész számok, és mivel a trajektóriák jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel, ezért az egyes ugrások közötti szakaszok hossza pozitív[10]. Mivel a folyamat a teljes $t \geq 0$ félegyenesen értelmezve van, és csak véges értéket vehet fel, az ugráspontok nem torlódhatnak véges értékhez. Az értékészletre tett megkötés alapján a folyamat trajektóriái egységnyi magasságú ugrásokat tartalmaznak. Az első ugrás helyét megadó

$$\tau_1(\omega) \doteq \inf\{t : X(t,\omega) = 1\} = \inf\{t : X(t,\omega) > 0\} < \infty$$

megállási idő[11] eloszlása exponenciális, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau_1 > t+s) &= \mathbf{P}(X(t+s)=0) = \mathbf{P}(X(s)=0, X(t+s)-X(s)=0) = \\ &= \mathbf{P}(X(s)=0)\,\mathbf{P}(X(t+s)-X(s)=0) = \\ &= \mathbf{P}(X(s)=0)\,\mathbf{P}(X(t)=0),\end{aligned}$$

amiből elemi megfontolásokkal[12] alkalmas $0 < \lambda < \infty$ számra

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) = \mathbf{P}(X(t)=0) = \exp(-\lambda t).$$

Az erős Markov-tulajdonság miatt a $X_1^*(t) \doteq X(\tau_1 + t) - X(\tau_1)$ eloszlása azonos a $X(t)$ eloszlásával, így vehetjük a X második ugrásainak helyét megadó

$$\tau_2(\omega) \doteq \inf\{t : X(t+\tau_1(\omega),\omega) = 2\} = \inf\{t : X_1^*(t,\omega) > 0\} < \infty$$

megállási időt.

$$\{\tau_2 < a\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}, r<a}\{X_1^*(r,\omega) > 0\},$$

így a τ_2 mérhető az X_1^* által generált σ-algebrára nézve. A τ_1 $\mathcal{F}_{\tau_1}$-mérhető és mivel az erős Markov-tulajdonság miatt az $\mathcal{F}_{\tau_1}$ független az X_1^* által generált σ-algebrától ezért a τ_1 és a τ_2 függetlenek. Hasonlóan folytatva kapjuk a következőt:

3.6 Állítás.
Valamely Poisson-folyamat, esetén az egyes ugrások között eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A különböző ugrások között eltelt időszakok hossza független, és időhossz eloszlása azonos.

3.7 Állítás.
Egy Poisson-folyamat ugrásainak időpontjai nem előrejelezhetőek.

Bizonyítás: Ahhoz, hogy az állításban szereplő kijelentés értelmes legyen meg kell mondani, hogy mit értünk előrejelezhető megállási időn: Egy $\tau > 0$ megállási időt előrejelezhetőnek mondunk, ha létezik megállási idők egy (ρ_n) sorozata, amelyre $\rho_n < \tau$ és $\rho_n \nearrow \tau$. Ez nyilvánvalóan azt jelent, hogy a (ρ_n) sorozat előrejelzi a τ bekövetkezését[13]. Rátérve az állítás igazolására ha például az első ugrás időpontját megadó τ_1 előrejlezhető lenne, akkor az

$$N_n^*(t) \doteq N(\rho_n + t) - N(\rho_n)$$

[9]Természetesen számláló folyamat alatt olyan folyamatot értünk, amely értékei az idő előrehaladtával rendre a $0, 1, 2, \ldots$ értékeket veszik fel.

[10]Ha $X(t,\omega) = k$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $X(t+u,\omega) = k$, ha $0 < u < \delta$.

[11]Lévy-folyamatok esetén a filtráció definíció szerint mindig jobbról folytonos! A feltétel szerint az 1 érték minden ω esetén felvételre kerül, ezért $\tau_1 < \infty$.

[12]Az $f(t) \doteq \mathbf{P}(X(t)=0)$ kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet. A $\mathbf{P}(X(t)=0) \equiv 0$ megoldás nem megfelelő, ugyanis az X ugrásai ilyenkor torlódnának. A $\mathbf{P}(X(t)=0) \equiv 1$ szintén nem megfelelő, ugyanis ilyenkor az X nem veheti fel az összes természetes számot.

[13]Érdemes hangsúlyozni, hogy az előrejelző sorozatból nem tudunk következteni a τ tényleges bekövetkezésének időpontjára, ugyanis azt nem tudjuk, hogy adott n-re milyen nagy a $\tau - \tau_n$ időhossz, csak annyit tudunk, hogy ha $n \to \infty$, akkor az eltérés nullához tart.

újraindított folyamatok mindegyike Poisson-folyamat lenne, és az eloszlásuk megegyezne az N eloszlásával. Az N_n^* első ugrása éppen a $\tau_1 - \rho_n$ időpontban következik be. De a τ_1-nek, és így mindegyik $\tau_1 - \rho_n$ megállási időnek létezik várható értéke amely az exponenciális eloszlás várható értéke alapján minden n-re éppen $1/\lambda > 0$. Így a majorált konvergencia tétel miatt[14]

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\tau_1 - \rho_n\right) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\tau_1 - \rho_n\right)\right) = 0,$$

ami lehetelen.

$\square$

3.2.1. A gamma és a béta eloszlás

Mi lesz az n-edik ugrás helyét megadó valószínűségi változó eloszlása? Ennek megválaszlása előtt érdemes néhány állítást feleleveníteni.

3.8 Definíció.
Ha λ és a pozitív számok, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (a, λ) paraméterű gamma eloszlásnak hívjuk és $\Gamma(a, \lambda)$ módon jelöljük.[15]

A Γ eloszlás jelentőségét az adja, hogy egyrészt az exponenciális eloszlás általánosítása, ugyanis $\Gamma(1, \lambda)$ éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás, másrészt szorosan kötődik a normális eloszlás négyzetének, vagyis a χ_1^2, eloszlásához: Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és határozzuk meg az $\eta \doteq \xi^2$ eloszlását. Ha $x \le 0$, akkor $F_\eta(x) = \mathbf{P}\left(\xi^2 < x\right) = 0$. Ha $x > 0$ akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}\left(\xi^2 < x\right) = \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Deriválással, ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Következésképpen az η eloszlás éppen $\Gamma(1/2, 1/2)$. A gamma eloszlás fontos tulajdonsága a következő:

3.9 Állítás.
Ha a τ_i független változók eloszlása $\Gamma(a_i, \lambda)$, akkor a $\sum_{i=1}^n \tau_i$ összeg eloszlása $\Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i, \lambda\right)$.

Bizonyítás: Az állítást elegendő két változóra belátni, az általános eset ebből indukcióval következik. Emlékeztetünk, hogy ha a ξ és az η változók függetlenek és a ξ sűrűségfüggvénye f és az η sűrűségfüggvénye g, akkor a $\xi + \eta$ rendelkezik sűrűségfüggvénnyel amely majdnem mindenhol azonos az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(x-z)\, dz$$

konvolúcióval. Ha $\xi \ge 0$ és $\eta \ge 0$, akkor az integrál

$$\int_0^x f(z)\, g(x-z)\, dz$$

[14] $0 \le \tau_1 - \rho_n \le \tau_1$ miatt triviálisan van integrálható majoráns.

[15] Ismételten némiképpen zavaró lehet, hogy szintén Γ jelöli a Γ eloszláshoz szorosan kötődő Γ függvényt.

módon írható. Ezt felhasználva

$$\int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(x-t)^{a-1}\exp(-\lambda(x-t))\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}t^{b-1}\exp(-\lambda t)\,dt =$$
$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^x (x-t)^{a-1}t^{b-1}dt =$$
$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)\int_0^1 (x-xz)^{a-1}(xz)^{b-1}xdz =$$
$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\exp(-\lambda x)x^{a+b-1}\int_0^1 (1-z)^{a-1}z^{b-1}dz =$$
$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}\exp(-\lambda x)x^{a+b-1},$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a gamma és a béta függvények közötti nevezetes azonosságot.

□

3.10 Következmény.
A Poisson folyamat n-edik ugrásának eloszlása $\Gamma(n,\lambda)$.

3.11 Következmény.
A χ_n^2 és a $\Gamma(n/2, 1/2)$ eloszlások megegyeznek.

3.12 Következmény.
Ha X Poisson-folyamat és λ az ugrások közötti eltelt idő paramétere, akkor

$$\mathbf{P}(X(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t).$$

Bizonyítás: Legyen $0 \le t < \infty$, és (τ_n) legyen az egyes ugrások között eltelt időtartamokat megadó független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változók sorozata. Vezessük be a $\sigma_n \mathrel{\hat{=}} \sum_{k=1}^n \tau_k$ változót. A σ_{n+1} eloszlása $\Gamma(n+1,\lambda)$. Parciálisan integrálva, illetve felhasználva, hogy $\Gamma(n+1) = n!$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X(t) < n+1) &= \mathbf{P}(\sigma_{n+1} > t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}x^n\exp(-\lambda x)\,dx = \\
&= \left[\frac{\lambda^{n+1}x^n}{\Gamma(n+1)}\frac{\exp(-\lambda x)}{-\lambda}\right]_t^\infty + \int_t^\infty n\frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n+1)}\exp(-\lambda x)\,dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t) + \mathbf{P}(X(t) < n).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{P}(X(t)=n) = \mathbf{P}(X(t) < n+1) - \mathbf{P}(X(t) < n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t),$$

tehát az $X(t)$, vagyis a t időpontig bekövetkezett ugrások száma, λt paraméterű Poisson-eloszlást alkot.

□

Természetesen a gondolatmenet egyik kulcsa a gamma és a béta függvény közötti nevezetes összefüggés volt. Mivel egy igen fontos és gyakran használt összefüggésről van szó, érdemes a következő szép bizonyítást megfontolni. A bizonyítás érdekessége, hogy a Fubin-tételre épül és jól példázza a mértékelmélet erejét:

3.13 Példa.
Igazoljuk a

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

formulát!

A gamma függvény mellett vezessük be a

$$\Gamma(x,\lambda) \mathrel{\hat{=}} \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-\lambda t)\,dt, \quad x,\lambda > 0.$$

függvényt. Egyszerű $u = t\lambda$ helyettesítéssel

$$\Gamma(x,\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1}\exp(-u)\frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}. \tag{3.5}$$

Ebből $s = t/(1-t)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
I &\mathrel{\hat{=}} \int_0^\infty \Gamma(x+y,1+s)\,s^{x-1}ds = \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^\infty (1+s)^{-(x+y)}s^{x-1}ds = \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 \left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-(x+y)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt = \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-(x+y)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt = \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} \Gamma(x+y)\,B(x,y).
\end{aligned}$$

Az integrandus folytonos és nem negatív, ezért alább a két integrál felcserélhető:

$$\begin{aligned}
I &\mathrel{\hat{=}} \int_0^\infty \Gamma(x+y,1+s)\,s^{x-1}ds \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} \int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-t(1+s))\,t^{x+y-1}s^{x-1}dtds = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-t(1+s))\,t^{x+y-1}s^{x-1}dsdt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1}\exp(-t)\int_0^\infty \exp(-ts)\,s^{x-1}dsdt \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} \int_0^\infty t^{x+y-1}\exp(-t)\,\Gamma(x,t)\,dt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1}\exp(-t)\frac{\Gamma(x)}{t^x}dt \mathrel{\hat{=}} \\
&\mathrel{\hat{=}} \Gamma(x)\int_0^\infty t^{y-1}\exp(-t)\,dt = \Gamma(x)\Gamma(y),
\end{aligned}$$

amiből

$$\Gamma(x+y)\,B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

□

Hasonlóan elegáns a következő, szintén gyakran használt összefüggés:

3.14 Példa.
Számoljuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$$

integrált!

Az $x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)$ függvény az $x, t \geq 0$ tartományon folytonos, és nem negatív, ezért alkalmazható rá a Fubini-tétel.

$$\begin{aligned} I &\doteq \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dx dt = \int_0^\infty \left[\frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{-2\left(1+t^2\right)}\right]_0^\infty dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $u = xt$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} I &\doteq \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dt dx = \\ &= \int_0^\infty x \exp\left(-x^2\right) \int_0^\infty \exp\left(-\left(xt\right)^2\right) dt dx = \\ &= \int_0^\infty x \exp\left(-x^2\right) \int_0^\infty \exp\left(-u^2\right) \frac{du}{x} dx = \left(\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2, \end{aligned}$$

vagyis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}. \tag{3.6}$$

Ebből elemi számolással $u = x^2$ helyettesítéssel

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right) dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

□

3.15 Definíció.
Ha α és β pozitív paraméterek, akkor az

$$f(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (α, β) paraméterű béta eloszlásnak hívjuk és $B(a, \beta)$ módon jelöljük.

3.16 Definíció.
Ha α és β pozitív paraméterek, akkor a

$$g(x) \doteq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást általánosított, vagy másodfajú béta eloszlásnak nevezzük. Az eloszlást $\widetilde{B}(\alpha, \beta)$-val fogjuk jelölni.

A $\widetilde{B}$ és a B eloszlások között, miként a nevük is mutatja, szoros összefüggés van.

3.17 Állítás.
Ha a ξ béta eloszlású, akkor az $\eta \doteq \xi/(1-\xi)$ másodfajú béta eloszlású. Ha η másodfajú béta eloszlású, akkor a $\xi \doteq \eta/(1+\eta)$ béta eloszlású.

Bizonyítás: Először érdemes egy általános kérdést feleleveníteni: Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó és legyen φ egy olyan szigorúan monoton növekedő, vagy szigorúan monoton csökkenő, folytonosan deriválható függvény, amelyre az $\eta \stackrel{\circ}{=} \varphi(\xi)$ értelmes. Tegyük fel, hogy a ξ sűrűségfüggvénye f. Számoljuk ki az η sűrűségfüggvényét! Ha a φ nő, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta < x) &= \mathbf{P}(\varphi(\xi) < x) = \mathbf{P}\left(\xi < \varphi^{-1}(x)\right) = \\ &= F\left(\varphi^{-1}(x)\right),\end{aligned}$$

amit deriválva, az összetett függvény deriválási szabálya miatt, az η sűrűségfüggvénye

$$f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x).$$

Ha a φ csökken, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta < x) &= \mathbf{P}(\varphi(\xi) < x) = \mathbf{P}\left(\xi > \varphi^{-1}(x)\right) = \\ &= 1 - F\left(\varphi^{-1}(x)\right),\end{aligned}$$

amit deriválva az η sűrűségfüggvénye

$$-f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x).$$

Mivel ilyenkor a képletben szereplő derivált negatív ezért a képlet

$$f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left|\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x)\right|$$

módon is írható. A konkrét esetre rátérve, ha $\varphi(u) \stackrel{\circ}{=} u/(1-u)$, akkor $\varphi^{-1}(x) = x/(1+x)$, és a sűrűségfüggvények transzformációs szabálya szerint

$$\begin{aligned}g(x) &= f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{a-1}\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

A fordított irány igazolása analóg.

□

3.18 Állítás.
Ha $\xi \cong \Gamma(a,\lambda)$ és $\eta \cong \Gamma(b,\lambda)$ valamint a ξ és az η függetlenek, akkor

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \widetilde{B}(a,b), \quad \frac{\xi}{\xi+\eta} \cong B(a,b). \tag{3.8}$$

Bizonyítás: Először elevenítsük fel a hányados sűrűségfüggvényének képletét. Legyen a ξ sűrűségfüggvénye f az η sűrűségfüggvénye legyen g. Mivel az η-nak van sűrűségfüggvénye, ezért az $\{\eta = 0\}$ esemény valószínűsége nulla, így a ξ/η értelmes. A teljes várható érték tétel miatt

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x \mid \eta = y\right)g(y)\,dy.$$

Hangsúlyozni kell, hogy ez egy definíció szerint teljesülő azonosság. A lényeges lépés a feltételés valószínűség kiszámolása. Felhasználva, hogy a ξ és az η függetlenek a feltétel behelyettesíthető és a feltétel elhagyható, így

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x \mid \eta = y\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right).$$

Az y előjele lehet pozitív vagy negatív. Az előjeltől függően továbbszámolva, ha például $y < 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right) = \mathbf{P}(\xi > yx) = 1 - F(yx).$$

Ezt visszaírva

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 - F(yx)\, g(y)\, dy.$$

Az x szerint deriválva sűrűségfüggvény

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(yx)\, g(y)\, y dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(yx)\, g(y)\, |y|\, dy$$

módon írható. A konkrét problémára rátérve a hányados sűrűségfüggvényének képletét felírva, és kihasználva a két változó nem negativitását, ha $u > 0$, akkor a (3.5) alapján

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} (uy)^{a-1} \exp(-\lambda uy) \frac{\lambda^{b}}{\Gamma(b)} y^{b-1} \exp(-\lambda y)\, y dy = \\
= &\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_{0}^{\infty} y^{a+b-1} \exp(-\lambda y (u+1))\, dy = \\
= &\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{\Gamma(a+b)}{(\lambda(u+1))^{a+b}} = \\
= &\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{(1+u)^{a+b}},
\end{aligned}$$

ami éppen a $\widetilde{B}(a,b)$. A második állítás igazolása a következő[16]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\xi+\eta} < x\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\xi/\eta}{1+\xi/\eta} < x\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\left(1+\frac{\xi}{\eta}\right)\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < \frac{x}{1-x}\right),
\end{aligned}$$

így deriválással az imént belátottak alapján a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} \frac{1}{(1+x/(1-x))^{a+b}} \frac{1}{(1-x)^{2}}.$$

Ez elemi számolással

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} (1-x)^{a+b} \frac{1}{(1-x)^{2}},$$

ami pedig

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$$

ami éppen a $B(a,b)$ sűrűségfüggvénye.

□

[16] V.ö.: (3.7), 35. oldal.

3.2.2. Poisson-folyamatok és az egyenletes eloszlás

Vegyünk egy n értéket. Jelölje σ_n valamely Poisson-folyamat n-edik ugrásának helyét. Mi lesz a

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \frac{\sigma_2}{\sigma_n}, \ldots, \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)$$

véletlenül választott $n-1$ pont eloszlása a $(0,1)$ intervallumban?

3.19 Példa.
Exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege és az egyenletes eloszlásból származó rendezett minta kapcsolata.

Legyenek $(\xi_k)_{k=1}^n$ független azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\sigma_m \doteq \sum_{k=1}^m \xi_k$. Határozzuk meg az $\eta_k \doteq \sigma_k/\sigma_n$ változók eloszlását.

$$\mathbf{P}(\eta_1 < x) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} < x\right).$$

A ξ_1 eloszlása $\Gamma(1,\lambda)$, a $\sum_{k=2}^n \xi_k$ eloszlása $\Gamma(n-1,\lambda)$. Ebből a (3.8) miatt az η_1 eloszlása $B(1,n-1)$. A $B(1,n-1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) \doteq \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)} x^{1-1}(1-x)^{n-2}, \quad x \in (0,1).$$

A $\Gamma(n) = (n-1)!$ értéket beírva

$$f_1(x) = (n-1)(1-x)^{n-2} \quad x \in (0,1).$$

Legyenek $(\tau_k)_{k=1}^{n-1}$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású változók és jelölje τ_1^* a legkisebb elemet, vagyis $\tau_1^* \doteq \min \tau_k$. $\{\tau_1^* < x\}$ pontosan akkor, ha legalább egy elem az $(n-1)$-ből kisebb mint x, tehát

$$F_1(x) \doteq \mathbf{P}(\tau_1^* < x) = 1 - (1-x)^{n-1}.$$

A τ_1^* sűrűségfüggvénye

$$F_1'(x) = (n-1)(1-x)^{n-2}$$

amely éppen azonos az $f_1(x)$ függvénnyel, vagyis az η_1 eloszlása azonos a τ_1^* eloszlásával. Hasonlóan a $\sum_{i=1}^k \xi_i$ eloszlása $\Gamma(k,\lambda)$ a $\sum_{i=k+1}^n \xi_i$ eloszlása $\Gamma(n-k,\lambda)$ így az η_k eloszlása $B(k,n-k)$, amely sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}.$$

Határozzuk meg az τ_k^* eloszlásfüggvényét. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen először τ_k^* egyenletes eloszlásból származó n elemű rendezett minta k-dik eleme. A $\{\tau_k^* < x\}$ esemény ekvivalens avval, hogy legalább k változó kisebb mint x. Ebből

$$F_k(x) \doteq \mathbf{P}(\tau_k^* < x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

A derivált kiszámolásának komplikáltsága miatt a sűrűségfüggvény meghatározása a következő:

$$\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} = \frac{\mathbf{P}(x \le \tau_k^* < x+h)}{h}.$$

Tekintsük a $0 \le x < x+h$ intervallumokat. A $\mathbf{P}(x \le \tau_k^* < x+h)$ annak a valószínűsége, hogy legfeljebb $(k-1)$ változó kisebb mint x és legalább k változó kisebb mint $x+h$. Annak a valószínűsége, hogy r változó esik az $[x, x+h)$ intervallumba $h^r = o\left(h^{r-1}\right)$ nagyságrendű, így egyedül az $r = 0$, illetve az $r = 1$ eseteket kell megvizsgálnunk. Ha az $\{x \leq \tau_k^* < x + h\}$ esemény teljesül, akkor az $r = 0$ lehetetlen, így a sűrűségfüggvény meghatározásakor egyedül az $r = 1$ esetet kell kiszámolnunk. Ilyenkor $k - 1$ elem kisebb mint x, egy az $[x, x + h)$ intervallumban van és $n - k$ elem nagyobb mint x, vagyis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(x \leq \tau_k^* < x + h\right) &= n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot h \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} + \\ &\quad + o(h) . \end{aligned}$$

Ebből a sűrűségfüggvény

$$n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} .$$

Ha n helyébe $(n - 1)$-et írunk, akkor éppen az η_k sűrűségfüggvényét kapjuk.

□

3.20 Példa.
Rendezett minta sűrűségfüggvénye.

Legyenek a $(\xi_k)_{k=1}^n$ változók függetlenek és rendelkezzenek azonos eloszlással. Jelölje F a közös eloszlásfüggvényt és f a közös sűrűségfüggvényt. Ha ξ_k^* jelöli a rendezett minta k-dik elemét akkor az előző példa gondolatmenetét általánosítva

$$\begin{aligned} \frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} &= \frac{\mathbf{P}\left(x \leq \xi_k^* < x + h\right)}{h} = \\ &= n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot f(x)\, h \cdot F(x)^{k-1} \cdot (1 - F(x))^{n-k} + \\ &\quad + o(h) , \end{aligned}$$

vagyis a ξ_k^* sűrűségfüggvénye

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot f(x) \cdot F(x)^{k-1} \cdot (1 - F(x))^{n-k} .$$

□

3.3. Sztochasztikus integrálás

A sztochasztikus folyamatok elméletének legfontosabb fogalma a sztochasztikus integrálás. Nagy általánosságban fogalmazva sztochasztikus integrálásról akkor beszélünk, ha vagy az integrandus vagy az integrátor sztochasztikus folyamat. Első lépésben a Poisson-folyamat, illetve a kompenzált Poisson-folyamat szerinti sztochasztikus integrálást vizsgáljuk meg. Illetve valamivel általánosabban feltesszük, hogy az integrátor trajektóriái korlátos változásúak. A sztochasztikus integrálra vonatkozó legfontosabb formula a parciális integrálás formulája. A kompenzált Poisson-folyamat martingál, így felmerül a kérdés, hogy milyen körülmények között lesz a sztochasztikus integrál szintén martingál. A sztochasztikus integrálás segítségével belátjuk, hogy két Poisson-folyamat pontosan akkor független, ha a közös ugrás valószínűsége nulla.

3.3.1. Az integrál definíciója

Ha a V integrátor trajektóriái korlátos változásúak, akkor a sztochasztikus integrál definíciója valójában nyilvánvaló. Ha minden trajektória egy jobbról reguláris és korlátos változású függvény, akkor minden ω kimenetel esetén a $\mu_\omega((a, b]) \doteq V(b, \omega) - V(a, \omega)$ kifejezés egy mértéket definiál az $(a, b]$ alakú intervallumok halmazán. A mértékkiterjesztési tétel közvetlen alkalmazával ez a mérték kiterjeszthető a számegyenes Borel-mérhető halmazaira. Ha az X integrandus minden trajektóriája Borel-mérhető, akkor definálható az

$$(X \bullet V)(t,\omega) \triangleq \int_0^t X(s,\omega)\, d\mu_\omega(s)$$

integrál. Miként láttuk, ha az X integrátor progresszíven mérhető, akkor az így kapott $X \bullet V$ sztochasztikus folyamat adaptált lesz. A minket érdeklő esetben az X integrandus balról reguláris. Ez az eset azért érdekes, mert ilyenkor az integrál minden véges intervallumon előállítható a

$$\sum_i X\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right) - V\left(t_i^{(n)}\right)\right)$$

alakú, úgynevezett Itô–Stieltjes közelítő összegek határértékeként. Valóban, a fenti összeg valamely $(a,b]$ szakasz esetén felírható $\int_a^b X_n dV$ módon, ahol

$$X_n \triangleq \sum_i X\left(t_i^{(n)}\right)\chi\left(\left(t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]\right).$$

Az X balról való folytonossága miatt ha

$$\lim_{n\to\infty} \max_i \left|t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right| = 0,$$

akkor $X_n \to X$. A regularitás miatt az X egyes trajektóriái, minden véges intervallumon, korlátosak[17]. A V által generált mérték szerint a véges szakaszok mértéke véges, így minden trajektória esetén alkalmazható a majorált konvergencia tétele. Hangsúlyozni kell, hogy a mértékek szerinti integrálok általában nem a közelítő összegek határértékei. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy az integrálközelítő összegek szerkezete igen speciális. Szemben a Riemann-integrállal, illetve az azt általánosító Stieltjes-integrállal most az integrálközelítő összegekben a közbülső pontot nem választhatjuk akárhogyan. Mindig szigorúan az intervallum kezdőpontjának kell megválasztani.

3.3.2. A parciális integrálás formulája

Felvethető a kérdés: Mi lesz az Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke ha az integrandos nem balról folytonos?

3.21 Lemma.
Ha X tetszőleges reguláris folyamat, akkor az Itô–Stieltjes közelítő összegek határértéke mindig az

$$\int_a^b X(s-)\, dV(s) \triangleq \int_a^b X_-(s)\, dV(s)$$

integrál, ahol értelemszerűen a mínusz jel az X folyamat bal oldali határértékre utal.

Bizonyítás: Tekintsük az X ugrásaiból álló $\Delta X \triangleq X - X_-$ folyamatot. A reguláris függvények alapvető tulajdonsága, hogy tetszőleges véges szakaszon a függvény egy adott $c > 0$ konstansnál nagyobb nagyságú ugrásainak száma mindig véges. Ennek oka következő: Legyen (t_n) egy olyan végtelen sorozat, amelyre $|(\Delta X)(t_n)| \geq c$. A szakasz végessége miatt feltehető, hogy a (t_n) sorozat monoton és konvergens. De a bal oldali határérték definíciója miatt feltehető, hogy van egy olyan $s_n < t_n$ sorozat, amelyre

$$|X(t_n) - X(s_n)| \geq c/2 > 0. \tag{3.9}$$

Ha a (t_n) monoton nő, akkor az (s_n) választható monoton növekedőnek, ha a (t_n) csökken, akkor az (s_n) szintén választható csökkenőnek, illetve az is feltehető, hogy az (s_n)-nek létezik határértéke

[17] Ha nem lenne korlátos, akkor lenne egy olyan (t_n) sorozat, amelyre $|X(t_n,\omega)| \geq n$ lenne. Az intervallum végessége miatt feltehető, hogy a (t_n) sorozat konvergens, illetve feltehető, hogy a sorozat monoton. Ez azonban ellentmond annak, hogy létezik a jobb és a bal oldali határérték.

és ez a határérték azonos a (t_n) határértékével. Ez azonban a trajektóriák regularitása miatt[18] ellentmond az (3.9) sornak. Ha $(u_i)_{i=1}^{N}$ a c-nél nagyobb ugrások halmaza, akkor a V jobbról való folytonossága miatt illetve a nagy ugrások számának végessége miatt

$$\sum \Delta X(u_i)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)\to 0.$$

Ebből következően feltehető, hogy $|\Delta X|\leq c$. De így minden trajekóriára

$$\begin{aligned}\left|\sum_i X\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)-\sum_i X_-\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)\right| &=\\ =\left|\sum_i \Delta X\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)\right| &\leq\\ \leq c\mathrm{Var}(V)(t).&\end{aligned}$$

Mivel a c választható tetszőlegesen kicsinek a $\sum_i X\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)$ közelítő összeg határértéke megegyezik az $\sum_i X_-\left(t_i^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i+1}^{(n)}\right)-V\left(t_i^{(n)}\right)\right)$ közelítő összegek határértékével. Mivel az X_- folyamat balról regularizált, a közelítő összegek határértéke éppen az $X_-\bullet V$ sztochasztikus integrál.

□

A lemma fontos következménye a parciális integrálás formulája. A formula kimondása előtt tekintsük a következő definíciót:

3.22 Definíció.
Ha minden

$$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_m^{(n)}<\ldots$$

partíció sorozatra, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\max_i\left|t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\right|=0$$

és minden t-re az

$$\sum_i\left(X\left(t_{i+1}^{(n)}\wedge t\right)-X\left(t_i^{(n)}\wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^{(n)}\wedge t\right)-Y\left(t_i^{(n)}\wedge t\right)\right)$$

sorozat határértéke létezik, akkor az így kapott határértéket az X és az Y folyamatok kvadratikus keresztvariációjának mondjuk és $[X,Y]$ módon fogjuk jelölni. Ha $X=Y$, akkor az X kvadratikus variációjáról beszélünk. A kvadratikus variációt $[X]$ módon fogjuk jelölni.

A későbbiek szempontjából nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a definíció némiképpen pontatlan, ugyanis nem tisztázza egyértelműen, hogy milyen topológiában követeljük meg a konvergenciát. Jelenleg konvergencián a pontonkénti konvergenciát értjük, vagyis minden t időpont és ω kimenetel esetén a felírt közelítő összeg konvergenciáját követeljük meg.

Most rátérhetünk a parciális integrálás formulájára.

3.23 Tétel.
Ha X és Y véges változású, jobbról reguláris folyamatok, akkor tetszőleges $a<b$ időpontok esetén

$$\begin{aligned}X(b)Y(b)-X(a)Y(a)&=\\ =\int_a^b X_-dY+\int_a^b Y_-dX&+\\ +[X,Y](b)-[X,Y](a)&.\end{aligned}$$

[18] Vagyis ellentmond a jobb és bal oldali határérték feltételezett létezésének.

Bizonyítás: A formulából természetesen az is kiderül, hogy amennyiben X és Y véges változású, jobbról reguláris folyamatok, akkor a keresztvariációkból álló $[X, Y]$ folyamat értelmes. Lényegében ez az állítás fő mondanivalója. Maga a formula lényegében nyilvánvaló. Az egyenlőségben szereplő sztochasztikus integrálok éppen a

$$\sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_i^{(n)}\right)-Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right),$$

illetve az

$$\sum_i Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(X\left(t_i^{(n)}\right)-X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right)$$

közelítő összegek határértékei. Ha felírjuk az $[X, Y]$ keresztvariációt definiáló közelítő összegeket, akkor elemi számolással látható, hogy a jobb oldalt közelítő összegek összegei a bal oldalon álló kifejezésre egyszerűsödnek. Mivel a bal oldal kontans, és a két integrál létezik ezért a keresztvariáció is létezik és a formula triviálisan teljesül.

□

Érdemes hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálok létezéséhez nem szükséges, hogy az integrátorok jobbról regulárisok legyenek. Tetszőleges korlátos változású függvény segítségével definiálhatjuk folytonos függvényekre a Riemman–Stieltjes integrált, amit aztán kiterjeszthetünk a Borel-mérhető függvényekre és így definiálhatjuk a függvény által generált mértéket, következésképpen az integrál is. Miként közismert ez mérték meg fog egyezni a jobbról regularizált verzió által az intervallumokon definiált mérték kiterjesztésével. Ugyanakkor az Itô–Stieltjes közelítő összegek csak akkor konvergálnak, ha az integrátor már jobbról regularizált, ugyanis akkor lesz csak az Itô–Stieltjes közelítő összeg a megfelelő lépcsős függvény integrálja. Ennek következtében a kvadratikus keresztvariáció csak jobbról[19] regularizált folyamatok esetén létezik, vagyis csak ilyen folyamatokra független a közelítő pontok sorozatának választásától.

3.24 Példa.
Kvadratikus keresztvariáció nem regularizált folyamatokra.

Legyen

$$V(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t<1 \\ 1/2 & \text{ha} \quad t=1 \\ 1 & \text{ha} \quad t>1 \end{cases}.$$

Ha a közelítő pontok egyike sem $t = 1$, akkor a kvadratikus variáció a $[0, 2]$ szakaszon 1, éppen $t = 1$ pontban vett jobb és a bal oldali határérték különbségének négyzete. Ha azonban a $t = 1$ is osztópont, akkor a kvadratikus variáció $(1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$.

□

Hangsúlyozni kell, hogy önmagában a parciális integrálás formulája semmitmondó, ugyanis a keresztvariációt éppen úgy definiáltuk, hogy a formula igaz legyen. A formula igazi ereje akkor lesz nyilvánvaló, ha ki is tudjuk számolni a keresztvariáció értékét.

3.25 Példa.
Ha az X folyamat folytonos az Y folyamat pedig véges változású, akkor $[X, Y] = 0$.

Ez a rendkívül gyakran használt összefüggés triviális következménye annak, hogy a

$$\max_i \left|X\left(t_i^{(n)}\right)-X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right| \sum_i \left|Y\left(t_i^{(n)}\right)-Y\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right|$$

triviálisan[20] a keresztvariációt közelítő összeg felső becslése. Az Y véges változású, így az összeg definíció szerint felülről becsülhető a $\mathrm{Var}(Y)(t) < \infty$ értékkel. De az X folytonos, így a $[0, t]$ szakaszon egyenletesen folytonos, így a maximumot tartalmazó kifejezés nullához tart. Következésképpen $[X, Y] = 0$.

[19] Vagy balról, de ez már konvenció kérdése.

[20] A $\left|\sum a_i b_i\right| \leq \max_i |a_i| \sum_i |b_i|$ elemi egyenlőtlenségről van szó.

□

3.26 Példa.
Ha az X és az Y folyamat véges változású és jobbról reguláris, akkor $[X,Y]=\sum\Delta X\Delta Y$, vagyis a keresztvariáció éppen az ugrások összege.

Az egyenlőség igazolásához feltehetjük, hogy az X és az Y tiszta ugró függvények. Ha például $X=X^c+X^d$ az X felbontása folytonos és ugró részre, akkor a keresztvariáció linearitása miatt[21]

$$[X,Y]=\left[X^c+X^d,Y\right]=[X^c,Y]+\left[X^d,Y\right]=\left[X^d,Y\right],$$

illetve hasonlóan eljárva az Y esetében

$$[X,Y]=\left[X^d,Y^c+Y^d\right]=\left[X^d,Y^d\right].$$

Tiszta ugró függvényekre felírva a parciális integrálás formuláját, kihasználva, hogy valamely pont mértéke éppen a pontban való ugrás nagysága

$$\begin{aligned}\int_a^b X_-dY &= \sum X_-(s)\,\Delta Y(s)\\ \int_a^b Y_-dX &= \sum Y_-(s)\,\Delta X(s)\end{aligned}$$

Ha első összeghez hozzáadjuk a $\sum\Delta X(s)\,\Delta Y(s)$ kifejezést és kiemeljük a ΔY-t akkor az

$$\sum X(s)\,\Delta Y(s)$$

összeget kapjuk. Ha ehhez hozzáadjuk a második integrált, akkor az

$$\sum\left(X(s)\,Y(s)-Y_-(s)\,X_-(s)\right)=\sum\Delta(YX)(s)$$

összeghez jutunk. Mivel az X és az Y tiszta ugrófüggvények, ezért az összeg éppen a parciális integrálási formulában szereplő $X(b)\,Y(b)-X(a)\,Y(a)$ kifejezésre egyszerűsödik. Érdemes hangsúlyozni, hogy mivel feltettük, hogy az X és az Y folyamatok véges megváltozásúak, ezért a fenti számolásban szereplő összegek abszolút konvergensek voltak, így a sorok összege független volt a sorrendtől és általában a szokásos véges öszegekre megszokott szabályok érvényesek maradtak[22].

□

3.3.3. A sztochasztikus integrál mikor lesz martingál?

Az alpont címe az imént bevezetett sztochasztikus integrállal kapcsolatos leginkább releváns kérdés. A választ a következő állítás tartalmazza:

3.27 Állítás.
Ha a V integrátor martingál és a $\mathrm{Var}(V)(\infty)$ változó integrálható, vagyis ha $\mathbf{E}(\mathrm{Var}(V)(\infty))<\infty$, akkor tetszőleges korlátos, balról folytonos és adaptált X integrandus esetén az $X\bullet V$ sztochasztikus integrál martingál.

Bizonyítás: Talán érdemes hangsúlyozni, hogy valamely véges változású V folyamat esetén a $\mathrm{Var}(V)$ módon jelölt folyamat értéke, definíció szerint, minden (t,ω) pár esetén az ω kimenetelhez tartozó trajektória megváltozása a $(0,t]$ szakaszon. Világos, hogy nagyobb t esetén a megváltozás nem lehet kisebb, így a $\mathrm{Var}(V)$ folyamat trajektóriái növekedőek. Ebből következően a $\mathrm{Var}(V)(\infty)$ módon jelölt végtelenben vett határérték mindig értelmes, és világos, hogy mérhető

[21] Triviálisan következik az integrál hasonló tulajdonságából.

[22] A példát indokolhatjuk úgy is, hogy leválasztjuk egy adott c-nél nagyobb ugrásokat, ezekre igazoljuk a formulát, majd megmutatjuk, hogy $c\searrow 0$ esetén éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk.

függvény. Természetesen semmi sem zárja ki, hogy ez a határérték esetleg ne legyen $+\infty$. Az állításban szereplő feltétel szerint a végtelenben vett határértékek által definiált függvény várható értéke véges. Ilyenkor szokás azt mondani, hogy a V integrálható változású.

Tegyük fel tehát, hogy a V integrálható változású martingál[23]. Legyen

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_m^{(n)} < \ldots$$

az $\mathbb{R}_+$ időegyenes egy felbontása. Tekintsük az

$$Y_n(t) \circeq \sum_i X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

alakú közelítő integrálfüggvényeket. Emlékeztetünk. hogy az $a \wedge b$ jel az a és a b számok közül a kisebbet jelöli, így az $Y_n(t)$ a $(0, t]$ szakaszba eső osztópontokra való összegzést adja meg. Vegyük észre, hogy a V jobbról való regularitása miatt a V trajektóriái jobbról regulárisak. Megmutatjuk, hogy az Y_n martingál. Ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s) = Y_n(s) + \mathbf{E}(U_n(s) + Z(s,t) \mid \mathcal{F}_s),$$

ahol $U_n(s)$ az s előtti utolsó osztóponthoz tartozó közelítő tag s és a következő osztópont közötti értéke, vagyis ha $u^{(n)}$ az s előtti utolsó osztópont és $t_{i-1}^{(n)}$ az s utáni első osztópont, akkor

$$U_n(s) \circeq X\left(u^{(n)}\right)\left(V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right) - V(s)\right),$$

illetve

$$Z(s,t) \circeq \sum_{s < t_{i-1}^{(n)} \le t} X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

az integrál többi része. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{E}(Z(s,t) + U_n(s) \mid \mathcal{F}_s) = 0$. Mivel egy véges összegről van szó elegendő belátni, hogy az összeg minden egyes tagjának feltételes várható értéke nulla. A feltételes várható érték elemi tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy $s < t_{i-1}^{(n)}$, így $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\mathbf{E}\left(V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X\left(t_{i-1}^{(n)}\right) 0 \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.
\end{aligned}$$

Hasonlóan mivel $u^{(n)} \le s \le t_{i-1}^{(n)}$, ezért

$$\mathbf{E}(U_n(s) \mid \mathcal{F}_s) = X\left(u^{(n)}\right)\mathbf{E}\left(V\left(t_{i-1}^{(n)}\right) - V(s) \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.$$

Minden egyszerűsége ellenére a fenti számolás a sztochasztikus folyamatok elméletének egyik kulcs számolása. Világos, hogy az $X\left(t_{i-1}^{(n)}\right)$ korlátosságát kihasználtuk. Egyrészt ott, hogy a szorzat feltételes várható értéke értelmes, másrészt a kiemelési szabály használatakor. A V martingál tulajdonsága miatt a $V\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - V\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)$ biztosan integrálható, de ha az X nem lenne korlátos, akkor az egész fenti gondolatmenetben szereplő feltételes várható értékek könnyen értelmetlenek lehetnének. Világos az is, hogy kihasználtuk, hogy a V martingál ugyanis ezért lesz az $\mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}$, illetve az $\mathcal{F}_s$ szerinti feltételes várható érték nulla. Ha $n \to \infty$ esetén

$$\sup_i \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| \to 0,$$

[23]Például egy kompenzált Poisson-folyamat.

akkor a már említett gondolatmenet miatt[24] minden (t, ω) esetén $Y_n(t, \omega) \to (X \bullet V)(t, \omega)$. A probléma csak az, hogy a határérték és a feltételes várható érték felcserélhető-e? Mivel a feltételek miatt triviálisan

$$|Y_n(t)| \leq \sup |X| \cdot \mathrm{Var}(V)(\infty) \in L^1(\Omega),$$

ezért a feltételes várható értékre alkalmazható a majorált konvergencia tétele, így

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((X \bullet V)(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n(t) \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= \lim_{n\to\infty} Y_n(s) = (X \bullet V)(s). \end{aligned}$$

Ami éppen a bizonyítandó tulajdonság.

□

3.4. Független Poisson-folyamatok ugrásai

Legyenek X és Y egy közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Poisson-folyamatok. Jelölje M és N a megfelelő exponenciális martingálokat. A parciális integrálási formula szerint

$$MN - 1 = M_- \bullet N + N_- \bullet M + [M, N].$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges véges intervallumon az M_- és az N_- korlátosak[25]. Ugyancsak véges szakaszokon a trajektóriák variációjából álló $\mathrm{Var}(M)$ és $\mathrm{Var}(N)$ folyamatoknak van integrálható majoránsa[26]. Ebből következően a sztochasztikus integrálok martingálok. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) - 1 = \mathbf{E}([M, N](t)).$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálok martingál tulajdonságának igazolásához szükséges, hogy az integrandus és az integrátor ugyanarra a filtrációra nézve legyen adaptált. Ezt biztosítja a feltétel, hogy az X és az Y egy közös filtrációra nézve alkotnak Poisson-folyamatot. Ha az X és Y folyamatoknak nincsen közös ugrása, akkor a Fourier-transzformáltak idő szerinti folytonossága miatt az M és N exponenciális martingáloknak sincsen közös ugrása. Mivel az M és az N trajektóriái korlátos változásúak és véges szakaszokon a Poisson-folyamatoknak csak véges számú ugrása van és az ugrások között az M és az N trajektóriái deriválhatóak, ezért

$$[M, N](t) = \sum_s \Delta M(s) \Delta N(s) = 0.$$

Ebből következően, ha egy valószínűséggel a két folyamatnak nincsen közös ugrása, akkor

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = 1.$$

A Fourier-transzformáltakkal átszorozva

$$\mathbf{E}(\exp(iuX(t) + ivY(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \cdot \mathbf{E}(\exp(ivY(t))),$$

vagyis az együttes Fourier-transzformált az egyedi Fourier-transzformáltak szorzatára bomlik. Következésképpen, ha az X-nek és az Y-nak a $[0, t]$ szakaszon egy valószínűséggel nincsen közös ugrása, akkor az $X(t)$ és az $Y(t)$ független. Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha az $X(t)$ és az

[24] A majorált konvergencia tétel és az X balról való regularitása miatt.

[25] A számláló korlátos, a nevező pedig, véges szakszon, egy adott érték felett halad, ugyanis olyan folytonos függvény, amelyik soha sem nulla.

[26] Ugyanis a Poisson-eloszlásnak van várható értéke.

$Y(t)$ függetlenek, akkor az együttes Fourier-transzformáltak szorzat alakra bomlanak. Az egyszerűség kedvéért nem a Fourier-transzformáltakkal, hanem a Laplace-transzformáltakkal írjuk fel az exponenciális martingálokat:

$$\begin{aligned} M(s,u) &\doteq \frac{\exp(-sX(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(u)))} \\ N(s,u) &\doteq \frac{\exp(-sY(u))}{\mathbf{E}(\exp(-sY(u)))} \end{aligned}$$

Ekkor a sztochasztikus integrálok ismét martingálok és a függetlenség miatt

$$\mathbf{E}(M(t)N(t)) = \mathbf{E}(M(t)) \cdot \mathbf{E}(N(t)) = 1$$

következésképpen a fenti gondolatmenet megismétlésével

$$\mathbf{E}([M,N](t)) = 0.$$

Könnyen látható, hogy például

$$\Delta M(s,r) = \frac{\exp(-sX(r)) - \exp(-sX(r-))}{\mathbf{E}(\exp(-sX(r)))} \leq 0$$

Így a közös ugrások szorzata nem negatív, így az ugrások szorzatának összegének várható értéke csak akkor lehet nulla, ha az X és Y folyamatoknak egy valószínűséggel nincsen közös ugrása.

A bemutatottakkal kapcsolatban két megjegyzést teszünk:

1. Ha az X Poisson-folyamat ugrásainak időpontja (σ_n) és az Y ugrásainak időpontja $(2\sigma_n)$, akkor könnyen látható, hogy nincsen közös ugrásuk, de nem is függetlenek. Ugyanakkor nem is lesznek egy közös filtrációra nézve egyszerre Poisson-folyamatok.

2. Érdemes hangsúlyozni, hogy csak az $X(t)$ és $Y(t)$ változók függetlenségét igazoltuk és nem igazoltuk az X és az Y folyamatok függetlenségét. Az X és Y folyamatokat, definíció szerint, függetlennek mondjuk, ha tetszőleges módon választva a $(t_i)_{i=1}^N$ és az $(s_j)_{j=1}^M$ időpontokat az $(X(t_i))_i$ vektor független az $(Y(s_j))_j$ vektortól. Emlékeztetünk, hogy ez utóbbi azt jelenti, hogy a két vektor által generált két σ-algebra független. A gondolatmenet némi kiterjesztésével megmutatható, hogy az ugrások egy valószínűséggel való diszjunktsága szükséges és elegendő feltétele a folyamatok függetlenségének.

3.5. Függelék: Fourier-transzformáció és függetlenség

A függetlenség a valószínűségszámítás egyik legkülönösebb fogalma. A függetlenség sokkal nehezebben kezelhető fogalom, mint az első ránézésre látszik. Ennek oka az elemi valószínűségszámításban is hangsúlyozott páronkénti és teljes függetlenség köztieltérés. A függetlenséget legegyszerűbben a Fourier-transzformáció segítségével kezelhetjük.

3.28 Definíció.
Legyen ξ valószínűségi változó. A

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \doteq \mathbf{E}(\exp(it\xi)) = \mathbf{E}(\cos t\xi) + i\mathbf{E}(\sin t\xi)$$

függvényt a ξ Fourier-transzformáltjának nevezzük. Ha a ξ eloszlásfüggvénye F, akkor

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF(x).$$

Az egydimenziós esettel analóg módon definiálható a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ vektor változó

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{t}) &= \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) \doteq \\ &\doteq \mathbf{E}(\exp(i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \ldots + t_m\xi_m))) = \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi}))) \end{aligned}$$

Fourier-transzformáltja. A valószínűségszámítási irodalomban a Fourier-transzformáció helyett szokás az eloszlás vagy a valószínűségi változó karakterisztikus függvényéről is beszélni. Ugyanakkor a karakterisztikus függvény kifejezést szokás a halmazok karakterisztikus függvényére is alkalmazni. A félreértések elkerülése céljából mi a továbbiakban inkább a Fourier-transzformáció kifejezés fogjuk használni.

3.29 Példa.
A λ paraméterű Poisson-eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

Valóban

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \exp(itk) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\exp(it))^k = \\ &= \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).\end{aligned}$$

□

3.30 Példa.
Az $N(0,1)$ standard normális eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)(\cos tx + i \sin tx)\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cos tx dx\end{aligned}$$

t szerinti deriváltját[27], majd a deriváltat parciálisan integrálva x szerint

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x \sin txdx = \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sin tx\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) t \cos txdx = \\ &= -t\varphi(t).\end{aligned}$$

Mivel a Fourier-transzformáció elemi tulajdonságai miatt $\varphi(0) = 1$, ezért a normális eloszlás Fourier-transzformáltjának eleget kell tenni a

$$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi(t), \quad \varphi(0) = 1 \tag{3.10}$$

egyenletnek. Közvetlen behelyettesítéssel látható, hogy a $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$ eleget tesz a (3.10) egyenletnek, és a kezdeti érték feladat egyértelmű megoldhatósága miatt az $\exp(-t^2/2)$ az egyetlen megoldása az egyenletnek[28].

□

A Fourier-transzformáció legfontosabb tulajdonsága, hogy egyértelműen jellemzi az eloszlást.

3.31 Tétel. (Unicitási tétel)
Ha a $\boldsymbol{\xi}_1$ és a $\boldsymbol{\xi}_2$ vektorok Fourier-transzformáltjai megegyeznek, akkor az eloszlásaik is megegyeznek.

[27] Mivel a normális eloszlásnak van várható értéke, ezért φ deriválható, és be lehet deriválni az integrál mögé.
[28] Lineáris differenciálegyenlet esetén a megoldás egyértelműsége közvetlenül, elemi módon igazolható.

Bizonyítás: Az állítás a monoton osztály tétel közvetlen következménye: Jelölje $\mathcal{L}$ az olyan u korlátos mérhető függvények halmazát, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)) = \mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_2)).$$

Az $\mathcal{L}$ triviálisan λ-rendszer, amely tartalmazza, az $\exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x}))$ alakú trigonometrikus függvények π-rendszerét. A monoton osztály tétel miatt az $\mathcal{L}$ tartalmazza a trigonometrikus polinomok által generált σ-algebra elemeinek karakterisztikus függvényeit. Ez utóbbi σ-algebra megegyezik a folytonos függvények által generált σ-algebrával[29], vagyis a Borel-halmazokkal. Ebből következően tetszőleges B Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B) = \mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)) = \mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_2)) = \mathbf{P}(\xi_2 \in B),$$

vagyis a két eloszlás valóban megegyezik.

□

3.32 Tétel.
A $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2,$$

ahol φ_1 a $\boldsymbol{\xi}_1$ és φ_2 a $\boldsymbol{\xi}_2$ Fourier-transzformáltja, és φ a $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ közös eloszlásának Fourier-transzformáltja.

Bizonyítás: Ha a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, akkor a felbontás teljesül. A fordított irány a monoton osztály tétel elemi következménye: Rögzítsünk egy $\mathbf{v}$ vektort és legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)\exp(i(v, \boldsymbol{\xi}_2))) = \mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)) \cdot \mathbf{E}(\exp(i(v, \boldsymbol{\xi}_2))).$$

Az $\mathcal{L}$ nyilvánvalóan λ-rendszer, ugyanis tartalmazza a konstans függvényeket, lineáris tér, és ha $u_n \in \mathcal{L}$ és (u_n) egyenletesen korlátos és $u_n \nearrow u$, akkor $u \in \mathcal{L}$. A feltétel szerint az $\mathcal{L}$ tartalmazza az

$$u(\mathbf{x}) = \exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x})),$$

alakú függvényekből álló π-rendszert. Így tartalmazza ezen π-rendszer által generált σ-algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden B Borel-mérhető halmazra

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))) &= \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1))\mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))) = \\ &= \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B)\mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))).\end{aligned}$$

Most legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos és mérhető v függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)\mathbf{v}\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)\right) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B)\mathbf{E}(\mathbf{v}\left(\boldsymbol{\xi}_2\right)).$$

A már bemutatott módon, a monoton osztály tétel segítségével, megmutatható, hogy minden D Borel-mérhető halmazra a χ_D függvény eleme az $\mathcal{L}$ rendszernek. Így

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B, \boldsymbol{\xi}_2 \in D) = \mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)\chi_D(\boldsymbol{\xi}_2)) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B)\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_2 \in D).$$

Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{\xi}_1$ és a $\boldsymbol{\xi}_2$ vektorok függetlenek.

□

[29] Ez tulajdonképpen a Weierstrass-féle approximációs tétel.

3.6. Függelék: A regressziós függvény kiszámolásának egy fontos esete

Igen gyakran hasznos a következő állítás:

3.33 Állítás.
Ha ξ és η független változók, $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ és

$$g(y) \triangleq \mathbf{P}((\xi, y) \in A),$$

akkor

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in A \mid \eta) = g(\eta).$$

Általánosabban, ha ξ és η független valószínűségi változók, f olyan kétváltozós Borel-mérhető[30] *függvény, amelyre létezik az $\mathbf{E}(f(\xi, \eta))$ véges vagy végtelen várható érték, és*

$$g(y) \triangleq \mathbf{E}(f(\xi, y)),$$

akkor

$$\mathbf{E}(f(\xi, \eta) \mid \eta) = g(\eta),$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{E}(f(\xi, \eta) \mid \eta = y) = \mathbf{E}(f(\xi, y) \mid \eta = y) = \mathbf{E}(f(\xi, y)),$$

vagyis a regressziós függvény kiszámolásakor a feltétel behelyettesíthető, illetve elhagyható.

Bizonyítás: A feltétel szerint az $\mathbf{E}(f(\xi, \eta))$ létezik. Mivel a ξ és az η függetlenek, az együttes eloszlásuk éppen a ξ és az η eloszlásainak szorzata, így a Fubini tétel alapján a g az η eloszlása szerint majdnem mindenhol értelemben jól definiált. Megjegyezzük, hogy a Fubini-tétel miatt a g „parciális várható érték” Borel-mérhető, és éppen az

$$\mathbf{E}(f(\xi, \eta) \mid \eta = y)$$

regressziós függvény egy verziója. Nem nehéz belátni, hogy az olyan korlátos f függvények, amelyekre az egyenlőség teljesül λ-rendszert alkotnak. Ha $A \triangleq C \times D$ egy Borel-mérhető tégla, akkor felhasználva, hogy a ξ és az η függetlenek

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((\xi, \eta) \in A \mid \eta) &\triangleq \mathbf{E}(\chi_C(\xi)\chi_D(\eta) \mid \eta) = \chi_D(\eta)\mathbf{E}(\chi_C(\xi) \mid \eta) = \\ &= \chi_D(\eta)\mathbf{E}(\chi_C(\xi)) = \chi_D(\eta)\mathbf{P}(\xi \in C) = g(\eta), \end{aligned}$$

vagyis ilyenkor az állítás teljesül. A monoton osztály tétel miatt a mérhető téglák által generált $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ σ-algebrára, nézve mérhető korlátos függvényekre teljesül az összefüggés. A monoton konvergencia tétellel az összefüggés kiterjeszthető a nem korlátos, nem negatív függvényekre is.

□

[30] Ha a ξ és az η nem valós értékű leképezések, akkor az f-nek szorzatmérhetőnek kell lenni.

4. fejezet

Sztochasztikus integrálás

A sztochasztikus integrálás célja, hogy kiterjessze az integrál fogalmát korlátos változású folyamatokról az úgynevezett szemimartingálokra. A szemimartingálok, definíció szerint, két folyamat összegeként írhatóak fel. Az egyik folyamat korlátos változású, a másik folyamat egy úgynevezett lokális martingál. Mivel a korlátos változású folyamatok szerinti integrálást már tárgyaltuk csak a lokális martingálok szerinti integrálást kell bemutatni. A sztochasztikus integrálás lényege, hogy az integrált az Itô–Stieltjes típusú közelítő összegek határértékeként definiáljuk. Az egyetlen lényeges különbség az, hogy a határérték, csak a sztochasztikus konvergenciában létezik.

4.1 Definíció. (Itô–Stieltjes-integrál)
Legyen X sztochasztikus folyamat és minden

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n \stackrel{\circ}{=} \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

Itô–Stieltjes közelítő összeget. Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0$$

a közelítő összegek sorozatára sztochasztikus konvergenciában

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta,$$

akkor ezt a közös ζ határértéket az X folyamat Y szerinti Itô–Stieltjes-integráljának mondjuk, és $\int_a^b XdY$ módon jelöljük.

4.1. Az integrál létezése

Természetesen az első lényeges kérdés, hogy milyen körülmények között létezik az integrál. Mivel a pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia ha Y korlátos változású és az X balról-reguláris, akkor az integrál létezik és megegyezik a trajektóriánként vett Lebesgue–Stieltjes-integrállal. Tudunk-e mondani azonban más eseteket is vagy sem?
Igen hasznosak a következő elemi összefüggések:

4.2 Lemma. (Kiemelési szabály)
Legyen ξ integrálható változó és legyen η korlátos[1] $\mathcal{F}$-mérhető változó. Ekkor

$$\mathbf{E}(\eta\xi \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

[1] Általában a korlátosság enyhíthető. Elegendő feltenni, hogy a ξ és az $\eta\xi$ integrálható legyen.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy az η korlátossága miatt az $\eta\xi$ változó is integrálható. Ha η egy $H \in \mathcal{F}$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor

$$\begin{aligned}\int_F \chi_H \xi d\mathbf{P} &= \int_{F\cap H} \xi d\mathbf{P} = \int_{F\cap H} \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P} = \\ &= \int_F \chi_H \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Mivel a $\chi_H \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ szorzat $\mathcal{F}$-mérhető, ilyenkor az egyenlőség teljesül. Az egyenlőség triviálisan átvihető lépcsős függvényekre. Ha $\xi \geq 0$, akkor a monoton konvergencia tételével az egyenlőség átvihető minden $\eta \geq 0$ $\mathcal{F}$-mérhető változóra. Ha ξ tetszőleges és $\eta \geq 0$ és korlátos, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\eta\xi \mid \mathcal{F}) &= \mathbf{E}\left(\eta\xi^+ \mid \mathcal{F}\right) - \mathbf{E}\left(\eta\xi^- \mid \mathcal{F}\right) = \\ &= \eta\mathbf{E}\left(\xi^+ \mid \mathcal{F}\right) - \eta\mathbf{E}\left(\xi^- \mid \mathcal{F}\right) = \\ &= \eta\left(\mathbf{E}\left(\xi^+ \mid \mathcal{F}\right) - \mathbf{E}\left(\xi^- \mid \mathcal{F}\right)\right) = \\ &= \eta\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ki kellett használni, hogy az $\eta\xi$ változó integrálható, ugyanis ellenkező esetben a számolás első fele értelmetlen lenne. Az általános eset indoklása analóg.

□

4.3 Lemma. (Martingáltranszformáció)
Legyen M az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál, X az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az

$$X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1}) \tag{4.1}$$

kifejezések integrálhatóak, akkor a

$$Z_0 \mathrel{\hat=} 0, \quad Z_n \mathrel{\hat=} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál. Speciálisan, ha X egyenletesen korlátos és M tetszőleges martingál, akkor a Z is martingál.

Bizonyítás: Kihasználva, hogy a feltétel szerint az $X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$ integrálható, a kiemelési szabály és a teljes várható érték tétele szerint, ha $k-1 \geq m$ tetszőleges n-re

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right)\mathbf{E}\left((M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}| \leq n\right) \cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0.\end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint a (4.1) integrálható használhatjuk a majorált konvergencai tételét, így

$$\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,$$

amiből a lemma igazolása már evidens.

□

A lemmában szereplő Z folyamatot martingáltranszformációnak mondjuk. A lemma szerint a martingáltranszformáció martingál marad, feltéve, hogy a transzformáció eredményeként kapott sorozat integrálható.

Szükségünk lesz még a következő azonosságra:

4.4 Lemma. (Energiaazonosság)
Legyen X egy martingál és tegyük fel, hogy minden t időpontra az $X(t)$ négyzetesen integrálható. Ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}\left((X(t) - X(s))^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(X^2(s)\right).$$

Bizonyítás: A két oldal eltérése

$$d \stackrel{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}(X(s) \cdot (X(s) - X(t))).$$

Ha $s < t$, akkor a martingál tulajdonság miatt

$$\begin{aligned} d_n &\stackrel{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t))) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot (X(s) - X(t)) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot \mathbf{E}(X(s) - X(t) \mid \mathcal{F}_s)) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}(X(s)\chi(|X(s)| \leq n) \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $X(s), X(t) \in L^2(\Omega)$ ezért az $|X(s) \cdot (X(s) - X(t))|$ integrálható. Így a majorált konvergencia tétele alkalmazható mind a két oldalon és

$$d = \lim_{n \to \infty} d_n = 0.$$

A bizonyítás kapcsán érdemes megjegyezni, hogy hasonlóan az előző lemma bizonyításához az egyedüli technikai gondot a kiemelési szabály alkalmazása okozta.

□

4.5 Definíció.
Emlékeztetünk, hogy az $M \in \mathcal{H}^2$ azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$ $L^2(\Omega)$-norma a t időparaméter szerint korlátos.

4.6 Példa.
A Wiener-folyamatok és a kompenzált Poisson-folyamatok véges intervallumokon $\mathcal{H}^2$-martingálok. Azonban a teljes számegyenesen ez nem érvényes.

A következő tétel a Stieltjes-integrálok létezését kimondó közismert tétel közvetlen álltalánosítása:

4.7 Tétel.
Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a, b]$-én M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X minden kimenetelre folytonos. A bizonyítást több lépésre bontjuk:

1. Tegyük fel, hogy $|X| \leq K$ és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)_k$ az $[a, b]$ szakasz felbontása. Az előző lemma alapján az integrálközelítő összegek

$$I_n \stackrel{\circ}{=} \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

sorozat martingál, így a sorozat tagjainak várható értéke nulla. A bizonyítás kulcsa, hogy

$$\|I_n\|_2^2 = \mathbf{D}^2(I_n) \leq K^2 L, \tag{4.2}$$

ahol az L rögzített, X-től nem függő determinisztikus konstans. Az energiaazonosság alapján

$$\|I_n\|_2^2 = \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2.$$

Az energiaazonosság újabb alkalmazásával

$$\begin{aligned}\|I_n\|_2^2 &= \sum_k \left\| X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left[M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right]\right\|_2^2 \le \\ &\le K^2 \sum_k \left\| M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 = \\ &= K^2 \sum_k \left(\left\| M\left(t_k^{(n)}\right)\right\|_2^2 - \left\| M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2\right) = \\ &= K^2\left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2\right),\end{aligned}$$

tehát az $M \in \mathcal{H}^2$ feltételezés miatt az

$$L \triangleq \|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2 < \infty$$

definícióval érvényes a (4.2).

2. A sztochasztikus konvergenciában minden Cauchy-sorozat konvergens, ezért az integrál konvergenciájának belátásához elegendő megmutatni, hogy az integrálközelítő összegek (I_n) sorozata sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Tekintsük az I_n és I_m integrálokhoz tartozó felosztások közös finomítását. Világos, hogy az $I_n - I_m$ felírható

$$\sum_i (X(s_i) - X(v_i))(M(u_i) - M(u_{i-1}))$$

módon, ahol az (u_i) az $[a, b]$ egy partíciója és minden i-re $s_i, v_i \le u_{i-1}$. Világos, hogy az így kapott összeg szintén martingál és az $L^2(\Omega)$ normájára igaz a korábban bemutatott becslés. (A K persze az $|X(s_s) - X(v_i)|$ közül a legnagyobb.) Az I_n és az I_m közelítő összegekhez tartozó partíciókat elég finomra véve az s_i és a v_i tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz. Az X trajektóriái folytonosak, vagyis az $[a, b]$ véges szakaszon egyenletesen is folytonosak, ezért ha $\delta \to 0$, akkor tetszőleges ω kimenetelre az

$$U(\omega, \delta) \triangleq \sup_{|t-s| \le \delta} |X(t, \omega) - X(s, \omega)|$$

folytonossági modulus nullához tart. Könnyen látható, hogy az U kiszámolásakor elegendő a racionális időpontokat venni, így az U mérhető. A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért tetszőleges $\tau, \varepsilon > 0$ számokhoz található olyan A halmaz és $\delta > 0$ szám, hogy $\mathbf{P}(A^c) < \tau$, és ha $\omega \in A$, akkor $U(\omega, \delta) < \varepsilon$. Mivel az $[a, b]$ intervallum felosztása végtelenül finomodik, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ számra, elegendően nagy n, m indexekre a Csebisev–egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \le \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) \le \tau + \frac{\varepsilon^2 L}{\alpha^2}.$$

A jobb oldali kifejezés az ε és a τ megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető, így az (I_n) sztochasztikusan Cauchy–sorozat.

3. Megjegyezzük azonban, hogy a bizonyítás pontatlan, ugyanis az $X\chi_A$ függvényhez rendelt lépcsős folyamatra nem alkalmazható a (4.2) becslés, ugyanis az így „csonkolt” folyamat nem feltétlenül adaptált! A gondolatmenet azonban könnyen pontosítható. Ha $U(u, \omega, \delta)$ jelöli az $[a, u]$ szakaszon vett folytonossági modulust, akkor evidens módon az $(u, \omega) \mapsto U(u, \omega, \delta)$ folytonos[2] trajektóriájú adaptált folyamat[3]. Ha

$$\tau(\omega) \triangleq \inf\{u : U(u, \omega, \delta) \ge \varepsilon\} \wedge b,$$

akkor a τ megállási idő. Ha $\omega \in A$, akkor $\tau(\omega) = b$, így az A halmazon $I_n^\tau - I_m^\tau = I_n - I_m$. Elegendő az A halmazon való „csonkolás” helyett az X^τ megállított folyamatra[4] alkalmazni a (4.2)

[2] A folytonosság miatt ha az u értékét csak elég kicsit növeljük, akkor az $[u, u+h]$ szakaszon a trajektória csak egy kicsit változik.
[3] Mindig elég a racionális időpontokat venni.
[4] A megállított folyamat adaptált lesz.

becslést és a

$$\mathbf{P}\left(|I_n - I_m| > \alpha\right) \leq \mathbf{P}\left(A^c\right) + \mathbf{P}\left(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}\right) \leq \tau + \mathbf{P}\left(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha\right)$$

egyenlőtlenséget.

□

4.8 Definíció.
Valamely a $t = 0$ időpontban nulla értéket felvevő L folyamatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható olyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$ és az L^{τ_n} megállított folyamatok mindegyike martingál. Hasonlóan egy a nulla pontból induló L folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál, ha megadható olyan $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozat, amelyre az L^{τ_n} négyzetesen integrálható martingál, vagyis amelyre $L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ minden n-re. Ha valamely X folyamat $X(0)+L$ alakú, ahol $X(0)$ tetszőleges $\mathcal{F}_0$-mérhető változó és L a nulla pontból induló lokális martingál, vagy lokálisan négyzetesen indegrálható martingál, akkor az X folyamatot lokális martingálnak, illetve lokálisan négyzstesen integrálható martingálnak mondjuk. A lokális martingálokat $\mathcal{M}_{loc}$ a lokálisan négyzetesen integrálható martingálokat $\mathcal{H}^2_{loc}$ módon szokás jelölni[5].

4.9 Példa.
Ha w egy Wiener-folyamat, akkor a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$, de $w \in \mathcal{H}^2_{loc}$.

4.10 Állítás.
Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a, b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a, b]$-én az M szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

Bizonyítás: Elegendő az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett M^{τ_n}-et írunk és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciója alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha n elég nagy akkor $\tau_n \geq b$ egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve. Másképpen ha n elég nagy akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a, b]$ szakaszon az M és az M^{τ_n} egybeesik.

□

4.11 Állítás.
Ha M folytonos lokális martingál, X folytonos adaptált folyamat, akkor az

$$\int_a^b X dM$$

sztochasztikus integrál létezik.

Bizonyítás: Mivel az integrál szempontjából csak az M növekményeik érdekesek, az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $M(a) = 0$. Legyen

$$\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : |M(t)| \geq n\}.$$

Az M folytonossága miatt $|M^{\tau_n}| \leq n$, vagyis az M lokálisan korlátos[6], így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás.

□

Az állítás bizonyításából azonnal következik a következő:

[5] A definíció első részében a lokális martingáloktól azért követeljük meg, hogy a nulla pontból induljanak ki, mert a $L^{\tau_n}(t) \stackrel{\circ}{=} L(t \wedge \tau_n)$ megállított folyamat definíciójával a $t = 0$ pontban a lokális martingálokat nem tudjuk módosítani. Ezt elkerülendő használhatnánk az $X^{\tau_n}(t) = \chi(\tau_n > 0)\, X(t \wedge \tau_n)$ definíciót is, amely segítségével a $t = 0$ időpontban is „le tudnánk vágni“ a lokális martingálok értékét. (Pl. $\sigma_n(\omega) \stackrel{\circ}{=} \infty$, ha $|X(0, \omega)| \leq n$ és minden más esetben $\sigma_n(\omega) \stackrel{\circ}{=} 0$ és a τ_n helyet vehetnénk a $\rho_n \stackrel{\circ}{=} \sigma_n \wedge \tau_n$ megállási időt.) A probléma azonban érdektelen, ugyanis csak sztochasztikus integrálokra akarjuk a lokális martingálok fogalmát alkalmazni és a sztochasztikus integrálok a $t = 0$ pontban mindig nullák, így a két definíció egybeesik és ezért célszerű az egyszerűbbet és kézenfekvőbbet alkalmazni.

[6] Vegyük észre, hogy itt kihasználtuk, hogy az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy az $M(a) = 0$, hiszen ellenkező esetben a becslés esetleg nem teljesülne, ha az M már eleve nagyobb lenne az a pontban mint n. De ennek nincsen jelentősége, ugyanis az M és az $M - M(a)$ szerinti integrálok megegyeznek.

4.12 Állítás.
Minden folytonos lokális martingál lokálisan négyzetesen integrálható.

Érdemes hangsúlyozni, hogy mivel az Itô–Stieltjes sztochasztikus integrál csak mint valószínűségi változó értelmes, ezért az értéke csak majdnem mindenhol definiálható. Éppen ezért az $\int_a^b XdM$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_b$-mérhetősége csak akkor garantálható, ha az $\mathcal{F}_b$ tartalmazza a nullmértékű halmazokat. Nem világos továbbá, hogy létezik-e olyan sztochasztikus folyamat, amely értéke minden t időpontban éppen az $\int_0^t XdM$ sztochasztikus integrál. Éppen ezért az alábbi állítás nem nyilvánvaló:

4.13 Állítás.
Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Ha az X folytonos valamint adaptált folyamat és az M lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor létezik olyan lokális martingál, amelyet $X \bullet M$-mel fogunk jelölni, amelyre tetszőleges t esetén

$$(X \bullet M)(t) \overset{m.m.}{=} \int_0^t XdM.$$

Ha az X egyenletesen korlátos és az M négyzetesen integrálható, akkor az $X \bullet M$ nem csak lokális martingál lesz, hanem martingál is. Ha az M folytonos, akkor az $X \bullet M$ folytonos.

Az elmondottak alapján folytonos és adaptált integrandus esetén a sztochasztikus integrál két esetben definiálható: Egyrészt ha az integrátor korlátos változású, másrészt ha az integrátor lokálisan négyzetesen integrálható martingál. Az első esetben az Itô–Stieltjes-féle közelítő összegek kimenetelenként konvergálnak, a második esetben pedig sztochasztikusan. Mivel a kimenetelenkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így mind a két esetben a közelítő összegek konvergálnak a sztochasztikus konvergencia által generált topológia szerint. Emlékeztetünk, hogy ha két sorozat sztochasztikusan konvergens, akkor az összegük is konvergens és a határérték éppen a határértékek összege. Ebből következően, ha az Y integrátor felbontható $Y = Y(0) + L + V$ módon és az X integrandus adaptált és folytonos, akkor Itô–Stieltjes-féle közelítő összegek konvergálnak. Ez indokolja a következő definíciót:

4.14 Definíció.
Ha az S folyamat felbontható $S = S(0)+L+V$ módon, ahol az L lokálisan négyzetesen integrálható martingál és a V véges változású adaptált folyamat, akkor az S folyamatot szemimartingálnak mondjuk.

A szemimartingálok definíciója alapján érvényes a következő tétel:

4.15 Tétel.
Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $[a,b]$ véges szakaszon majdnem minden ω-ra folytonos és az Y szemimartingál, akkor az X az $[a,b]$-én az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható.

A szemimartingálok osztályát meglehetősen formálisan definiáltuk. A definícióból az sem világos, hogy minden lokális martingál szemimartingál-e. A folytonos lokális martingálok lokálisan négyzetesen integrálhatóak, de mit lehet mondani a nem folytonos lokális martingálokról? Nem egyszerű annak igazolása, hogy ha valamely S folyamat egy lokális martingál és egy adaptált véges változású folyamat összege, akkor az S szemimartingál[7]. Ebből speciálisan az is következik, hogy minden L lokális martingál és tetszőleges X folytonos adaptált folyamat esetén értelmes az $X \bullet L$ sztochasztikus integrál és az integrál az Itô–Stieltjes-féle közelítő összegek határértéke, ahol a konvergencia a sztochasztikus konvergenciában értendő. Ezen állítások igazolása igen messze vezetne.

[7] Az érdekes eset annak igazolása, hogy minden lokális martingál felbontható két lokális martingál összegére. Az egyik eleme a $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ térnek, a másik pedig korlátos változású. Mivel a korlátos változú, folytonos lokális martingálok konstansok a második tag nyilván nem folytonos. Hangsúlyozni kell, hogy az idevágú tételek igazolása egyrészt nehéz, másrészt a területtel ismerkedők számára szükségtelen.

4.2. A sztochasztikus integrál tulajdonságai

Mivel a sztochasztikus integrált az Itô–Stieltjes-féle közelítő összegek határértékeként definiáltuk a parciális integrálás formulája kézenfekvő módon átvihető véges változású folyamatokról szemimartingálokra. Mivel azonban a sztochasztikus integrált csak folytonos integrandus esetén értelmeztük fel kell tételezni, hogy a formulában szereplő két folyamat folytonos[8] szemimartingál.

4.16 Tétel. (Parciális integrálás)
Ha X és Y folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpont esetén

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t XdY + \int_0^t YdX + [X,Y](t),$$

ahol $[X,Y]$ a két szemimartingál kvadratikus keresztvariációja. A keresztvariáció a t időpontban az

$$\sum_i \left(X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_{i-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. Ilyenkor az $[X,Y]$ szintén folytonos.

Megjegyezzük, hogy a tétel igazolása szinte szó szerint megegyezik a korlátos változású esetben bemutatottal: Ha az integrálokra, illetve a kvadratikus variációra felírjuk a közelítő kifejezéseket, elemi számolással látható. hogy azonosságot kapunk. Ha a felbontást finomítjuk, akkor az integrálok konvergensek, így a keresztvariációt definiáló szorzatösszeg is konvergens és a formula fennáll. Ismételten hangsúlyozni kell, hogy az integrálok csak sztochasztikus konvergenciában léteznek, így a keresztvariáció is csak sztochasztikus konvergenciában létezik. Ebből következően a keresztvariáció automatikusan nem definiál egy folyamatot, hanem csak valószínűségi változók egy indexelt halmazát. Mivel azonban az integráloknak létezik sztochasztikus folyamat verziója, a kvadratikus keresztvariációnak is létezik sztochasztikus folyamat verziója. Mivel folytonos integrátor esetén a sztochasztikus integrálnak van folytonos verziója, ezért a keresztvariációnak is van folytonos verziója.

Természetesen most is hangsúlyozni kell, hogy bizonyos értelemben a parciális integrálás formulája semmitmondó, ugyanis éppen minden úgy van definiálva, hogy a formula teljesüljön. Vagyis némi túlzással azt is mondhatjuk, hogy a formula definíció szerint teljesül. A formula súlyát az adja, hogy nagyon sok esetben a kvadratikus variációt ki tudjuk számolni, illetve igen gyakran a sztochasztikus integrálok várható értékét[9] is ki tudjuk számolni. Éppen ezért az alábbi példa alapvető jelentőségű.

4.17 Példa.
A Wiener-folyamat kvadratikus variációja a $[0,t]$ intervallumon éppen t.

Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ az $[a,b]$ szakasz egy partíciója. Ha $\Delta w\left(t_k^{(n)}\right) \doteq w\left(t_k^{(n)}\right) - w\left(t_{k-1}^{(n)}\right)$, akkor a Wiener-folyamat definíciója alapján

$$\mathbf{E}\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) = \sum_k \mathbf{D}^2\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right) = \sum_k (t_k - t_{k-1}) = b - a.$$

[8] Valójában erre nincsen szükség, de az egyszerűség kedvéért csak azt az esetet tárgyaljuk.

[9] A sztochasztikus integrálok eloszlásának kiszámolására általában nincsen remény. Általában azt tudjuk tenni, hogy megmutatjuk, hogy valódi martingálok és így a várható értékük nulla. Erre később számos példát fogunk látni.

A w független növekményű és a növekmények várható értéke nulla, ezért, ha a $\left(t_k^{(n)}\right)$ felosztás finomsága nullához tart, akkor

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_k \left(\Delta w \left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 - (b-a) \right\|_2^2 &= \mathbf{D}^2 \left(\sum_k \left(\Delta w \left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 \right) = \\
&= \sum_k \mathbf{D}^2 \left(\left(\Delta w \left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 \right) \leq \\
&\leq \mathbf{E} \left(\left(\Delta w \left(t_k^{(n)}\right)\right)^4 \right) = \\
&= \mathbf{E} \left((N(0,1))^4 \right) \left(\sqrt{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} \right)^4 = \\
&= \sum_k 3 \cdot \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right)^2 \leq \\
&\leq 3 \cdot (b-a) \cdot \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right) \to 0.
\end{aligned}
$$

Vegyük észre, hogy a számolás során kihasználtuk, hogy a standard normális eloszlás negyedik momentuma éppen 3. Valóban

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 4y^2 \exp(-y) \frac{1}{\sqrt{2y}} dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{3/2} \exp(-y)\, dy = \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3.
\end{aligned}
$$

Mivel az $L^2(\Omega)$-ban való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia ezért a w kvadratikus variációja az $[a,b]$ szakaszon éppen $b-a$.

□

További kvadratikus variációk kiszámolását teszi lehetővé az úgynevezett polaritási formula.

4.18 Állítás. (Polaritási formula)
Ha L tetszőleges lokális martingál, akkor $[X \bullet L] = X^2 \bullet [L]$. Hasonlóan, ha M és N két lokális martingál, akkor

$$[X \bullet M, Y \bullet N] = XY \bullet [M,N].$$

A formula bizonyítása nagyon messze vezetne, itt csak egy heurisztikus indoklást mutatunk be: A kvadratikus variáció definíciója alapján

$$[X \bullet L] \approx \sum_k \left((X \bullet L)(t_k) - (X \bullet L)(t_{k-1})\right)^2.$$

A sztochasztikus integrál a közelítő összegek határértéke, így egy igen kicsi intervallumon az integrál megváltozása éppen egy darab közelítő „téglalap” vagyis éppen $X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1}))$. Tehát

$$
\begin{aligned}
[X \bullet L] &\approx \sum_k \left(X(t_{k-1})(L(t_k) - L(t_{k-1}))\right)^2 = \\
&= \sum_k X(t_{k-1})^2 (L(t_k) - L(t_{k-1}))^2.
\end{aligned}
$$

Ugyanakkor az $(L(t_k) - L(t_{k-1}))^2$ éppen a $[L]$ kvadratikus variáció növekményének egy közelítése, így

$$[X \bullet L] \approx \sum_k X(t_{k-1})^2 ([L](t_k) - [L](t_{k-1})).$$

Vegyük észre, hogy ez a szorzatösszeg éppen az $X^2 \bullet [L]$ integrál egy közelítő összege, amiből a polaritási formula már „világos“. Hasonlóan kell igazolni az általános formulát:

$$\begin{aligned}
[X \bullet M, Y \bullet N] &\approx \sum_k \Delta(X \bullet M)(t_k)\,\Delta(Y \bullet N)(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_{k-1})\,\Delta M(t_k)\,Y(t_{k-1})\,\Delta N(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_{k-1})\,Y(t_{k-1})\,\Delta N(t_k)\,\Delta M(t_k) = \\
&= \sum_k X(t_{k-1})\,Y(t_{k-1})\,\Delta[N, M](t_k) \approx \\
&\approx XY \bullet [N, M].
\end{aligned}$$

A polaritási formula mellett a másik fontos integrálási szabály az asszociativitási szabály. Tegyük fel, hogy $S(u) \circeq \int_0^u X(s)\,dM(s)$, és tekintsük az $\int_0^t Y(u)\,dS(u)$ integrált. Mivel az integrál a közelítő összegek határértéke, ezért

$$\int_0^t Y(u)\,dS(u) \approx \sum_k Y(u_{k-1})\,\Delta S(u_k).$$

A már látott gondolatmenettel egyező módon az $S(u)$ integrálfüggvény $\Delta S(u_k)$ növekményei az S alakja miatt közelíthetőek az

$$X(u_{k-1})\,\Delta M(u_k)$$

„téglalapokkal”, így

$$\int_0^t Y(u)\,dS(u) \approx \sum_k Y(u_{k-1})\,X(u_{k-1})\,\Delta M(u_k) \approx \int_0^t Y(u)\,X(u)\,dM(u).$$

Másképpen fogalmazva integrálfüggvény szerinti integrálás esetén a két integrál elvégzésének sorrendje „csoportosítható”.

4.19 Állítás. (Asszociativitási szabály)
Tegyük fel, hogy a $Z \circeq X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik. Az $Y \bullet Z$ sztochasztikus integrál pontosan akkor létezik, ha létezik az $XY \bullet M$ integrál és érvényes a következő asszociativitási formula:

$$Y \bullet (X \bullet M) = (YX) \bullet M.$$

A sztochasztikus folyamatok irodalomban gyakran minden további említés nélkül használni szokás a formulát. Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel és $dS = XdM$, akkor az

$$(Y \bullet S)(t) \circeq \int_0^t Y(u)\,dS(u)$$

integrál az

$$YdS = Y(XdM) = (YX)\,dM$$

formális szabály szerint alakítható, vagyis formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezhető. Vegyük észre, hogy a formula érvényes minden fajta integrálra, így a Stieltjes- vagy az absztrak mérték szerinti integrálokra egyaránt használható. Emlékeztettünk, ha valamely G súlyfüggvény deriválható és a G deriváltja, g, a G sűrűségfüggvénye[10], akkor

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Ezt a formulát szokás a várható értékek, illetve a különböző momentumok kiszámolására használni az elemi valószínűségszámításban. Vegyük észre, hogy az asszociativitási szabály éppen ennek a sűrűségfüggvényre vonatkozó alapvető formulának az általánosítása sztochasztikus integrálok esetére.

A sztochasztikus integrál egy további fontos tulajdonsága a következő:

4.20 Állítás. (Megállítási szabály)
Ha az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál létezik és τ tetszőleges megállási idő, akkor

$$(X \bullet M)^{\tau} = X \bullet M^{\tau}.$$

A formula tartalma ismét nyilvánvaló. Ha az M integrátort megállítjuk a τ időpontban, akkor a τ után az M növekményei már nullák, ugyanis az M a τ időpont után konstans. Így az $X \bullet M$ a τ után már nem nő, vagyis az így kapott integrál éppen az $(X \bullet M)^{\tau}$.

Végezetül nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az alfejezetben tárgyalt számolási szabályokat nem igazoltuk, csak elmagyaráztuk. A pontos formális igazolások igen messze vezetnek.

4.3. Mikor lesz a sztochasztikus integrál martingál?

A sztochasztikus analízis legfőbb technikai problémája éppen a jelen alfejezet címe: Mikor lesz egy lokális martingál valódi martingál? A kérdés természetesen főleg azért érdekes, mert tudni szeretnénk, hogy egy sztochasztikus integrál mikor lesz martingál, ugyanis ilyenkor a várható értéke nulla lesz minden t-re. Az alábbiakban számtalanszor fogunk szembesülni avval, hogy egy sztochasztikus integrálról szeretnénk tudni, hogy a várható értéke nulla vagy sem. Általában sajnos nem, csak akkor, ha tudjuk, hogy valódi martingál. Ha L lokális martingál és (τ_n) a megfelelő lokalizációs sorozat, akkor

$$\mathbf{E}(L^{\tau_n}(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(L(t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = L(s\wedge\tau_n) = L^{\tau_n}(s).$$

valahányszor $t > s$. Ha $n \nearrow \infty$, akkor mivel a lokalizáció definíciója miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} L^{\tau_m}(s) = L(s).$$

A kérdés csak az, hogy az egyenlőség másik oldalán mikor vihető be a feltételes várható értékbe a határérték. Erre számos általános tétel ismert, a legegyszerűbb talán, ha az $L(t)$-nek t-szerint van integrálható majoránsa. Az integrálható majoráns létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$\sup_t |L(t)|$$

változó integrálható legyen. Erre vonatkozóan hasznos az úgynevezett Davis-féle egyenlőtlenség, amely a $\sup_t |L(t)|$ integrálhatóságának szükséges és elegendő feltételét adja meg a folyamat kvadratikus variációjának segítségével:

4.21 Állítás.
Vannak olyan c és C univerzális konstansok, hogy tetszőleges L lokális martingál és τ megállási idő esetén

$$c\left\|\sqrt{[L](\tau)}\right\|_1 \le \left\|\sup_{t\le\tau}|L(t)|\right\|_1 \le C\left\|\sqrt{[L](\tau)}\right\|_1,$$

ahol a norma a megfelelő változók $L^1(\Omega)$ térben vett normáját jelöli.

[10] Vagyis ha $G(x) = \int_0^x g(u)\,du$.

4.22 Definíció.
Definíció szerint $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ha

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty.$$

Vegyük észre, hogy a belső integrál egy monoton növekedő folyamat, az $[M]$, szerinti trajektóriánkénti integrálja egy nem negatív folyamatnak. Vagyis minden ω kimenetelre ki kell számolni egy-egy integrált és az így kapott valószínűségi változónak kell venni a várható értékét. Természetesen az $\mathbb{R}_+$ időtengely helyett tetszőleges más intervallum is írható. Ilyenkor az integrálokat az adott időszakaszra kell kiszámolni.

A Davis-egyenlőtlenség fontos következménye a következő:

4.23 Állítás.
Ha M tetszőleges lokális martingál és $X \in \mathcal{L}^2(M)$, akkor az $X \bullet M$ sztochasztikus integrál martingál.

Bizonyítás: A Davis-egyenlőtlenség szerint az $X \bullet M$ sztochasztikus integrálnak pontosan akkor van integrálható majoránsa, ha

$$\left\| \sqrt{[X \bullet M](\infty)} \right\|_1 < \infty.$$

A polaritási formula és a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\sqrt{[X \bullet M](\infty)}\right) &\leq \sqrt{\mathbf{E}([X \bullet M](\infty))} \leq \\
&\leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2 \bullet [M](\infty))} \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right)} < \infty.
\end{aligned}$$

□

4.24 Példa.
Ha w Wiener-folyamat, akkor az $\exp(w) \bullet w$ sztochasztikus integrál martingál.

Elég megmutatni, hogy tetszőleges véges szakaszon az $\exp(w) \bullet w$ martingál. Ehhez azonban elegendő, hogy tetszőleges $[0,t]$ szakaszon $\exp(w) \in \mathcal{L}^2(w)$. Emlékeztetünk, hogy a w kvadratikus variációja éppen $[w](s) = s$, így

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_0^t (\exp(w(s)))^2 ds\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(2w(s))\, ds\right) = \\
&= \int_0^t \mathbf{E}(\exp(2w(s)))\, ds = \\
&= \int_0^t \exp\left(\frac{(2\sqrt{s})^2}{2}\right) ds < \infty,
\end{aligned}$$

ahol természetesen az utolsó sorban felhasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó formulát, illetve azt, hogy a $w(s)$ eloszlása $N(0, \sqrt{t})$.

□

5. fejezet

Itô-formula

A sztochasztikus analízis legfontosabb összefüggése az Itô-formula. Mindazt, amit idáig tanultunk tekinthetjük a formulához kapcsolódó előtanulmányoknak.

5.1 Tétel. (Itô-formula)
Ha F kétszer folytonosan deriválható n-változós függvény, és $(X_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpontra

$$\begin{aligned} F(X(t)) - F(X(0)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X(s))\, dX_k(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(s))\, d[X_i, X_j](s). \end{aligned}$$

A formulának számos olvasata van. Először tegyük fel, hogy az X egy lokális martingál. Ha F egy kétszer folytonosan deriválható függvény, akkor az $F(X)$ szintén sztochasztikus folyamat, amely értéke egy (t, ω) pontban éppen $F(X(t, \omega))$. A formula szerint ez a transzformált sztochasztikus folyamat két folyamat összegére bontható. Az első, mivel az X most egy lokális martingál, egy lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál, vagyis egy lokális martingál. A második egy véges változású folyamat, az $[X]$, szerinti sztochasztikus integrál, vagyis egy véges változású folyamat. Vagyis az $F(X)$ transzformált folyamat egy lokális martingál és egy véges változású tag összegére bontható, vagyis egy szemimartingál. Másképpen az Itô-formula szerint egy lokális martingál kétszer folytonosan deriválható függvénye szemimartingál. Ha az X szemimartingál, akkor az X szerinti sztochasztikus integrál, definíció szerint, az X lokális martingál része szerinti integrál és az X véges változású része szerinti integrál összege. Vagyis egy lokális martingál és egy véges változású folyamat összege, vagyis az első sztochasztikus integrál egy szemimartingál. Ehhez kell hozzáadni a másodrendű tagokból álló véges változású folyamatot, így az $F(X)$ biztosan szemimartingál. Így az Itô-formula éppen azt mondja, hogy a szemimartingálok osztálya zárt a kétszer folytonosan deriválható függvényekkel való transzformációra nézve. Egyúttal a formula megadja a transzformáció során kapott szemimartingál felbontását is.

5.1. Másodrendű közelítések, kvadratikus variáció

A bizonyítás nagyon messze vezetne, de azért némi indoklást célszerű adni. Világos, hogy valami fajta Newton–Leibniz-szabályról van szó. Próbáljuk meg először így igazolni. Rögzítsünk egy $[a, b]$ szakaszt és vegyük a szakasz egy (t_k) partícióját. Tekintsük az

$$F(X(b)) - F(X(a)) = \sum_k \left(F(X(t_k)) - F(X(t_{k-1}))\right)$$

teleszkópikus felbontást. A közönséges Newton-Leibniz-szabály esetén az

$$\begin{aligned} F\left(X\left(t_{k+1}\right)\right)-F\left(X\left(t_{k}\right)\right) &\approx F'\left(X\left(\tau_{k}\right)\right)\left(X\left(t_{k+1}\right)-X\left(t_{k}\right)\right)= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X\left(\tau_{k}\right)\right)\left(X_i\left(t_{k+1}\right)-X_i\left(t_{k}\right)\right) \end{aligned}$$

közelítéssel élünk[1]. Vegyük észre, hogy az így kapott

$$\sum_{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X\left(\tau_{k}\right)\right)\left(X_i\left(t_{k}\right)-X_i\left(t_{k-1}\right)\right)$$

összeg általában nem konvergál a megfelelő sztochasztikus integrálokhoz, ugyanis a τ_k közelítő pontokat nem a $[t_{k-1}, t_k]$ szakaszok kezdőpontjának kaptuk, márpedig a közelítő összeg csak akkor konvergál a sztochasztikus integrálhoz, ha $\tau_k = t_{k-1}$. A teleszkopikus összeget becsülhetnénk másképpen is. Ennek a klasszikus esetben nincs értelme, most azonban célszerű, ha a Taylor-formula által biztosított

$$F'\left(X\left(t_{k-1}\right)\right)\left(X\left(t_{k}\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)+\frac{1}{2}F''\left(X\left(\tau_{k}\right)\right)\left(X\left(t_{k}\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)$$

másodrendű közelítéssel élünk. Emlékeztetünk, hogy a második derivált egy kvadratikus alak, így az $X\left(\tau_k\right)$ pontban vett F'' második derivált az $X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)$ helyen éppen

$$\left(X\left(t_{k}\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)^{T}\cdot H\cdot\left(X\left(t_{k}\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)$$

módon írható, ahol

$$H \circeq \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\right)$$

a második parciális deriváltakból álló úgynevezett Hesse-mátrix. Tehát a másodrendű tag

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta X_i\left(t_k\right)\Delta X_j\left(t_k\right).$$

A Taylor-formula szerint a másodrendű tagban levő τ_k továbbra is a $[t_{k-1}, t_k]$ egy alkalmas köztes pontja, de a köztes τ_k az elsőrendű tagban nem szerepel csak a másodrendű tagban. Az elsőrendű közelítés éppen az

$$\int_a^b F'(X)\,dX = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)\,dX_i$$

sztochasztikus integrálokhoz tart. Mivel a keresztvariáció növekményének becslése alapján

$$\Delta X_i\left(t_k\right)\Delta X_j\left(t_k\right) \approx \Delta\left[X_i, X_j\right]\left(t_k\right)$$

ezért

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta X_i\left(t_k\right)\Delta X_j\left(t_k\right) \approx \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta\left[X_i, X_j\left(t_k\right)\right],$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta X_i\left(t_k\right)\Delta X_j\left(t_k\right) &\approx \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X\left(\tau_k\right)\right)\Delta\left[X_i, X_j\right]\left(t_k\right) \\ &\to \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X(t)\right)d\left[X_i, X_j\right](t). \end{aligned}$$

[1] Ügyeljünk a többváltozós függvények deriválási szabályára. A többváltozós függvények deriváltja sorvektor.

Vegyük észre, hogy a másodrendű tagokból képzett integrál a négyzetes keresztvariáció szerint képzett integrál, vagyis közönséges Stieltjes-integrál, így az a tény, hogy a τ_k nem az intervallum kezdőpontja nem okoz gondot.

Az Itô-formula a Newton–Leibniz-szabály általánosítása. A két formula különbsége a másodrendű tagokban van. A klasszikus analízisben a másodrendű tagok értéke nulla lenne, ugyanis ha egy F függvény kétszer folytonosan deriválható, akkor az F'' folytonos függvény az $[a,b]$ véges szakaszon korlátos, tehát

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\sum_k F''(\tau_k)(t_k-t_{k-1})^2\right| &\leq \frac{1}{2}K\sum_k (t_k-t_{k-1})^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2}K\max_k|t_k-t_{k-1}|\sum_k(t_k-t_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{2}K\max_k|t_k-t_{k-1}|(b-a)\to 0.\end{aligned}$$

5.2. Itô-formula időtől függő transzformációs függvény esetén

A többdimenziós Itô-formula speciális esete amikor $Y(s) \triangleq F(s,X(s))$, ahol az F egy kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint

$$\begin{gathered}Y(b)-Y(a) = F(b,X(b)) - F(a,X(a)) = \\ = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(s,X(s))\,ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s))\,dX(s) + \\ +\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s,X(s))\,d[s] + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X(s))\,d[X](s) + \\ +\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial s\partial x}(s,X(s))\,d[s,X](s).\end{gathered}$$

Könnyen belátható, hogy tetszőleges véges $[a,b]$ szakaszon $[s]=0$. Valóban, triviális módon

$$\sum_k \left(s_k^{(n)}-s_{k-1}^{(n)}\right)^2 \leq \max_k\left|s_k^{(n)}-s_{k-1}^{(n)}\right|\sum_k\left|s_k^{(n)}-s_{k-1}^{(n)}\right|.$$

Az összeg éppen $b-a$. Mivel a felbontás finomsága definíció szerint nullához tart a növekmények négyzetes összege nullához tart. A keresztvariáció szintén nulla, ugyanis az X trajektóriáinak folytonossága miatt

$$\begin{aligned}|[s,X](t)| &\approx \left|\sum_k (s_k-s_{k-1})(X(s_k)-X(s_{k-1}))\right| \leq \\ &\leq t\cdot\max_k|X(s_k)-X(s_{k-1})|\to 0.\end{aligned}$$

A másodrendű tagban tehát három tényező[2] elhagyható, így

$$\begin{aligned}F(b,X(b))-F(a,X(a)) &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(s,X(s))\,ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s))\,dX(s) + \\ &+\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X(s))\,d[X](s).\end{aligned}$$

[2] A vegyes deriváltakat tartalmazó tag ugyanis kétszer szerepel az összegben.

5.3. Az Itô-formula és a parciális integrálás formulája

A formula jobb megértése céljából érdemes megvizsgálni a parciális integrálás formulája és az Itô-formula kapcsolatát. Egyrészt az Itô-formulából következik a parciális integrálás formulája: Ha $F(x,y) \triangleq xy$, akkor alkalmazható az Itô-formula. Mivel $\partial F/\partial y = x$, $\partial F/\partial x = y$, a két másodrendű parciális derivált nulla, valamint a vegyes parciális derivált éppen 1, ezért

$$F(X(b),Y(b)) - F(X(a),Y(a)) =$$
$$= X(b)Y(b) - X(a)Y(a) =$$
$$\int_a^b XdY + \int_a^b YdX + 2\frac{1}{2}\int_a^b 1d[X,Y],$$

amiből a parciális integrálás formulája evidens.

Valamivel érdekesebb a fordított irányú kapcsolat. Az Itô-formula egyik igen elegáns bizonyítása arra épül, hogy a parciális integrálás formulájával belátjuk az Itô-formulát polinómokra, majd az F függvényt és deriváltjait egyenletesen megközelítjük polinómokkal, illetve a polinóm, megfelelő deriváltjaival. Bár első hallásra nem tűnik egyszerűnek, és a bizonyítás második fele némiképpen technikás, mégis ez a bizonyítás, bármilyen meglepő is, tisztább és egyszerűbb és jóval áttekinthetőbb mint a Taylor-formulára alapozott. A bizonyításból csak az egy változós polinómokra való esetet mutatjuk be. Könnyen látható, hogy az Itô-formula lineáris, vagyis ha igaz egy F és egy G függvényre, akkor igaz az $F+G$ függvényre is. Elegendő tehát a formulát csak az $F(x) = x^n$ alakú polinómokra igazolni. Ezt indukcióval végezhetjük el. Ha $n=0$, akkor $x^n \equiv 1$, és a formula triviálisan igazolható. Ugyancsak triviális az $n=1$ eset. Ilyenkor a formula az

$$X(b) - X(a) = \int_a^b 1dX + \frac{1}{2}\int_a^b 0d[X]$$

azonosságra egyszerűsödik. Ha $n=2$, akkor a formula éppen

$$X^2(b) - X^2(a) = 2\int_a^b XdX + [X],$$

ami a parciális integrálás formulából evidens. Tegyük fel, hogy az állítást már egy n-re igazoltuk, vagyis tegyük fel, hogy az

$$X^n - X^n(0) = nX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} \bullet [X]$$

egyenlőséget már beláttuk. Az $X^{n+1} = X^n \cdot X$ szereposztással alkalmazva a parciális integrálás formuláját

$$X^{n+1} - X^{n+1}(0) = X^n \bullet X + X \bullet X^n + [X^n, X].$$

Az X^n képletét beírva az $X \bullet X^n$ integrálba az asszociativitási szabály alapján

$$X \bullet X^n = nXX^{n-1} \bullet X + \frac{n(n-1)}{2}XX^{n-2} \bullet [X].$$

A polaritási formula szerint

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X] + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} \bullet [[X], X].$$

Vegyük észre, hogy az $[X]$ korlátos változású az X folytonos, ezért a második integrál integrátora nulla, így csak az első tag marad, vagyis

$$[X^n, X] = nX^{n-1} \bullet [X].$$

A két képletet a parciális integrálás formulájába visszaírva a jobb oldal

$$(n+1)\,X^n \bullet X + \frac{n\,(n-1)}{2} X^{n-1} \bullet [X] + nX^{n-1} \bullet [X]$$

amely éppen

$$(n+1)\,X^n \bullet X + \frac{n(n-1)+2n}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

ami pedig

$$(n+1)\,X^n \bullet X + \frac{n\,((n-1)+2)}{2} X^{n-1} \bullet [X]$$

vagyis éppen a formula $n+1$ kitevőre.

5.4. A formula néhány alkalmazása

A formula számtalan alkalmazása közül csak néhányat mutatunk be:

5.2 Példa.
Normális eloszlás karakterisztikus függvénye Itô-formulával.

Elegendő kiszámolni az $N(0,1)$ karakterisztikus függvényét. A $z \mapsto \exp(itz)$ kifejezés mint komplexből komplexbe ható leképezés tekinthető $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétszer deriválható függvénynek. Külön alkalmazva a formulát a valós és a komplex részre az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned} \exp(itw(s)) - \exp(itw(0)) &= it \int_0^s \exp(itw(u))\, dw(u) + \\ &+ \frac{1}{2}(it)^2 \int_0^t \exp(itw(u))\, d[w(u)]. \end{aligned}$$

A két oldalon várható értéket véve:

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2}t^2 \mathbf{E}\left(\int_0^s \exp(itw(u))\, du\right).$$

A két integrált felcserélve

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) - 1 = -\frac{1}{2}t^2 \int_0^s \mathbf{E}(\exp(itw(u)))\, du.$$

Deriválva az

$$\frac{d}{ds}\mathbf{E}(\exp(itw(s))) = -\frac{1}{2}t^2 \mathbf{E}(\exp(itw(s))).$$

Az egyenletet megoldva

$$\mathbf{E}(\exp(itw(s))) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}s\right).$$

Ha $s=1$, akkor $w(s)$ eloszlása $N(0,1)$, így

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Ha a komplex számokat el akarjuk kerülni, akkor az Itô-formulát a $w \mapsto \cos tw$ és $w \mapsto \sin tw$ szereposztásokkal kell alkalmazni, majd a két oldal várható értékét venni. Minden esetben ki kell használni, hogy a sztochasztikus integrálok valódi martingálok, ugyanis az integrandusok korlátosak.

□

5.3 Példa.
L^2-ben korlátos lokális martingál, amelyik nem martingál.

1. Tekintsünk az $\mathbb{R}^3$ térben egy $\mathbf{w}$ standard Wiener–folyamatot. A $t=0$ pontból eredő problémák elkerülése céljából tegyük fel, hogy a $\mathbf{w}$ folyamatot csak a $t>0$ időpontokra vizsgáljuk. Ha $t\to\infty$, akkor[3]

$$R(t) \mathrel{\hat{=}} \|\mathbf{w}(t)\|_2 \to \infty.$$

Közvetlen deriválással egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ térben az

$$f(\mathbf{x}) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

függvény harmonikus, vagyis

$$\Delta f \mathrel{\hat{=}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}f + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}f = 0.$$

Mivel a három dimenziós Wiener-folyamat majdnem minden kimenetelre soha sem lesz nulla[4], ezért az következésképpen az $M \mathrel{\hat{=}} 1/R$ értelmes. Itô-formula miatt az $M \mathrel{\hat{=}} 1/R$ lokális martingál, ugyanis a másodrendű tagokat tartalmazó korrekciós tag az Itô-formulában nulla. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(M^2(t)\right) &\mathrel{\hat{=}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sum_k x_k^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^3} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k \frac{(x_k-u_k)^2}{t}\right) d\lambda_3(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq K<\infty,\end{aligned}$$

vagyis hogy az M folyamat az L^2 térben korlátos.

2. Evidens módon az integrálban csak az $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ körül lehet probléma, de ott az integrál konvergens. Ennek igazolása a következő: Legyenek n és α tetszőlegesek. Jelölje B az $\mathbb{R}^n$ tér egységgömjét. Ha

$$G(k) \mathrel{\hat{=}} \left\{1/2^{k+1} < \|x\| \leq 1/2^k\right\},$$

akkor

$$\begin{aligned}\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n &= \int_{B\setminus\{0\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \\ &= \int_{\cup_k G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \sum_k \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n.\end{aligned}$$

A szumma mögött álló integrál minden k-ra triviálisan véges. Mivel

$$2^k G(k) = G(0) = \{1/2 < \|x\| \leq 1\},$$

ezért a helyettesítéses integrálás formulája[5] szerint, ha T jelöli a 2^k-val való szorzást

$$\begin{aligned}\int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n &= \int_{T(G(k))} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \int_{G(k)} \frac{1}{\|T(x)\|^\alpha} \det(T')\, d\lambda_n \\ &= \int_{G(k)} \frac{1}{\|2^k x\|^\alpha} \det\left(\operatorname{diag}\left(2^k\right)\right) d\lambda_n = \\ &= \frac{1}{2^{k\alpha}} \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} 2^{kn} d\lambda_n = \\ &= 2^{k(n-\alpha)} \int_{G(k)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n,\end{aligned}$$

[3] V.ö.: 6.14. állítás, 6.14. oldal. Hangsúlyozni kell, hogy a tér dimenziója fontos. Például, ha $n=1$, akkor a Wiener-folyamat végtelen sokszor visszatér az origóba, vagyis végtelen sokszor a normája nulla. Ha $n=2$, akkor bár a Wiener-folyamat nem lesz nulla, de a pályái sűrűek a síkban, vagyis az első „jó" dimenzió az $n=3$. Ilyenkor a $\mathbf{w}$ normája végtelenbe tart.

[4] V.ö.: 6.13. tétel, 71. oldal.

[5] Ha a maximum normát használjuk, akkor elegendő koordinátánként alkalmazni a helyettesítési formulát.

amiből

$$\int_B \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n = \int_{G(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-\alpha)},$$

és ez utóbbi éppen akkor konvergens, ha $n > \alpha$. Mivel most $n = 3$ és $\alpha = 2$, ezért az integrál, miként állítottuk véges.

3. Az $n = 3$ feltétel miatt a Wiener-folyamat nomája majdnem mindenhol végtelenhez tart, ezért $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$. Az L^2-korlátosság miatt a folyamat egyenletesen integrálható. Így a konvergencia nem csak majdnem mindenhol, hanem L^1-ben is teljesül, vagyis

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(M(t)) = \lim_{t\to\infty} \|M(t)\|_1 = 0.$$

Ha M martingál lenne és $t < s$, akkor

$$M(t) = \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t).$$

A torony-szabályból következő

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) - \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F})\|_1 &\overset{\circ}{=} \mathbf{E}(|\mathbf{E}(\xi - \eta \mid \mathcal{F})|) \leq \\ &\leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(|\xi - \eta| \mid \mathcal{F})) = \\ &= \mathbf{E}(|\xi - \eta|) \overset{\circ}{=} \|\xi - \eta\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség miatt a feltételes várható érték az L^1-konvergencia szerint folytonos, így

$$\begin{aligned} M(t) &= \lim_{s\to\infty} M(t) = \lim_{s\to\infty} \mathbf{E}(M(s) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty} M(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(0 \mid \mathcal{F}_t) = 0 \end{aligned}$$

lenne, ami lehetetlen.

4. Az ellentmondás az egyenletes integrálhatóságra való hivatkozás nélkül is kicsikarható. Ha az M martingál lenne, akkor alkalmazható lenne az energiaazonosság. Így minden $t < s$ esetén

$$\|M(s) - M(t)\|^2 = \|M(s)\|^2 - \|M(t)\|^2.$$

Ebből következően az $s \mapsto \|M(s)\|$ monoton növekedő lenne. Mivel korlátos, ezért a végtelenben konvergens lenne. Így az energiaazonosság miatt az $\|M(t) - M(s)\|^2$ is tetszőlegesen kicsi lenne. Ebből következően az $L^2(\Omega)$ tér teljessége miatt a $\lim_{s\to\infty} M(s)$ határérték $L^2(\Omega)$-ban is létezne. Mivel minden L^2-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, amely határértéke, miként láttuk, nulla, ezért az $L^2(\Omega)$-ban vett határérték szintén nulla. Így

$$\|M(t)\| \leq \lim_{s\to\infty} \|M(t)\| = 0,$$

vagyis az M azonosan nulla lenne.

□

6. fejezet

Wiener-folyamat

A sztochasztikus folyamatok közül a legegyszerűbb a Wiener-folyamatok osztálya. A Wiener-folyamatokról szóló tételek igazolása nagyrészt az Itô-formulán alapszik. Ennek oka, hogy Wiener-folyamatok esetén az Itô-formulában alapvető szerepet játszó kvadratikus variáció közvetlenül kiszámolható, illetve hogy a kvadratikus variáció determinisztikus.

6.1 Definíció.
A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$,
2. *a w növekményei függetlenek,*
3. *tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s) \cong N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye*
$$g_{t-s}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$
4. *A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória folytonos.*

Másképpen fogalmazva a Wiener-folyamatok olyan folytonos Lévy-folyamatok, amelyek növekményeinek eloszlása egy $[s,t]$ szakaszon $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$.

A normális eloszlás momentumai alapján triviális a következő:

6.2 Lemma.
Tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre
$$\mathbf{E}\left((w(t) - w(s))^n\right) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (t-s)^{n/2} & ha \quad n = 2k \\ 0 & ha \quad n = 2k+1 \end{cases}.$$

6.3 Lemma.
Ha $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, akkor a $(w(t_1), w(t_2), \ldots, w(t_k))$ vektor eloszlásának létezik f sűrűségfüggvénye, és
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)$$
ahol a jelölés egyszerűsítése végett $t_0 = x_0 = 0$.

Bizonyítás: Legyen $t_0 \triangleq 0$. Definíció szerint a
$$(\Delta w(t_0), \Delta w(t_1), \ldots, \Delta w(t_{k-1}))$$

független normális eloszlású változókból álló vektor, így a növekményekből álló vektor g sűrűségfüggvénye

$$g(u_1, u_2, \dots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right).$$

Az $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \\ u_2 &= x_2 - x_1 \\ &\dots \\ u_k &= x_k - x_{k-1} \end{aligned}$$

lineáris transzformáció determinánsa 1, hiszen olyan felső háromszög mátrixról van szó, amely átlójában csupa egyes van. Ha f jelöli az esetlegesen létező sűrűségfüggvényt, akkor definíció szerint

$$P \triangleq \int_H f(x)\, dx_1 \dots dx_k = \mathbf{P}\left((w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_k)) \in H \right).$$

Az integráltranszformációs-tétel alapján az egyenlőség a következőképpen folytatható:

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\left(A(w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_k)) \in AH \right) = \\ = \mathbf{P}\left((\Delta w(t_0), \Delta w(t_1), \dots, \Delta w(t_{k-1})) \in AH \right) = \\ = \int_{AH} g(u_1, u_2, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k = \\ = \int_H g(Ax) \left|\det(A)\right| dx_1 \dots dx_k = \int_H g(Ax)\, dx_1 \dots dx_k, \end{gathered}$$

amelyből

$$f(x) = g(Ax) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right),$$

ahol $x_0 \triangleq 0$.

□

Wiener-folyamatok definícióját érdemes módosítani tetszőleges filtráció esetére:

6.4 Definíció.
A $t \in [0, \infty)$ időparamétertől függő w $\mathcal{F}$-adaptált folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) = 0$,
2. *minden t-re és tetszőleges $h > 0$ számra a $w(t+h) - w(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$-től,*
3. *tetszőleges $0 \le s < t$ értékekre a $w(t) - w(s)$ normális eloszlású, 0 várható értékkel és $\sqrt{t-s}$ szórással,*
4. *a $w(\omega)$ trajektóriák minden ω-kimenetelre folytonosak,*
5. *az $\mathcal{F}$ teljesíti a szokásos feltételeket.*

Ha másképpen nem említjük, a továbbiakban feltételezzük, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció valamilyen módon adott.

6.5 Példa.
Ha w Wiener–folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra, akkor nem feltétlenül Wiener–folyamat egy bővebb $\mathcal{G}$ filtrációra.

Ha w Wiener–folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra, akkor a $\mathcal{G}_t \doteq \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_1)$ filtrációra nem lesz Wiener–folyamat, ugyanis ha $1 = s > t$, akkor mivel a $w(s)$ $\mathcal{F}_t$-mérhető, nem érvényes az

$$\mathbf{E}(w(s) \mid \mathcal{F}_t) = w(t)$$

martingáltulajdonság.

□

A Wiener-folyamatokra tett feltételek nem függetlenek egymástól. Érdemes hangsúlyozni, hogy a fajsúlyos feltétel a negyedik, amely szerint a trajektóriák folytonosak. Tudunk-e ennél többet mondani? A Wiener-folyamatok talán legérdekesebb tulajdonsága, hogy majdnem minden ω-ra a $w(\omega)$ trajektória egyetlen pontban sem deriválható.

6.6 Tétel. (Paley–Wiener–Zygmund)
Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden ω kimenetelre a $w(\omega)$ trajektória egyetlen időpontban sem deriválható.

Az, hogy egy Wiener-folyamat nem deriválható, úgy fogalmazható, hogy „lokálisan” túlságosan ingadozik. Hasonló igaz „globálisan”.

6.7 Állítás.
Ha w Wiener-folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) = \infty, \quad \liminf_{t\to\infty} w(t) = -\infty.$$

6.8 Következmény.
Ha w Wiener-folymat, akkor tetszőleges a számra a $\{t : w(t) = a\}$ halmaz felülről nem korlátos. Speciálisan egy egy-dimenziós Wiener-folyamat végtelen sokszor visszatér a nulla pontba.

6.9 Állítás. (Nagy számok törvénye)
Ha w Wiener-folyamat, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0.$$

A w trajektóriáinak irreguláris volta nem túl meglepő, ugyanis igaz a következő általános észrevétel:

6.10 Tétel. (Fisk)
Legyen L folytonos lokális martingál. Ha az L trajektóriái véges változásúak, akkor majdnem minden ω kimenetelre az L trajektóriái konstansok.

Bizonyítás: Tekintsük az $M \doteq L - L(0)$ lokális martingált. Elég belátni, hogy az $M = 0$. Legyen $V \doteq \operatorname{Var}(M)$ és legyen (ρ_n) az M lokalizációs sorozata. Mivel a folytonos függvények teljes megváltozása is folytonos a

$$\upsilon_n(\omega) \doteq \inf\{t : |M(t,\omega)| \geq n\}$$

és a

$$\kappa_n(\omega) \doteq \inf\{t : V(t,\omega) \geq n\}$$

megállási idők. Így a $\tau_n \doteq \upsilon_n \wedge \kappa_n \wedge \rho_n$ szintén megállási idő. Nyilván $\tau_n \nearrow \infty$, így ha minden n indexre $M^{\tau_n} = 0$ akkor az M nulla a $[0, \tau_n]$ szakaszon minden n-re, így az M nulla a $\cup_n [0, \tau_n] = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmazon, így $M = 0$. A folytonosság miatt az $|M^{\tau_n}| \leq n$ és $|V^{\tau_n}| \leq n$, így a trajelktóriák korlátosak. Feltehető tehát, hogy az M és a $V \doteq \operatorname{Var}(M)$ korlátossak. Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ a $[0, t]$ egy infinitezimális particiója. Az energiaazonosság miatt ha $u > v$, akkor

$$\mathbf{E}\left((M(u) - M(v))^2\right) = \mathbf{E}\left(M^2(u) - M^2(v)\right),$$

és mivel $M(0)=0$ ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(M^2(t)\right) &= \mathbf{E}\left(M^2(t)\right)-\mathbf{E}\left(M^2(0)\right)= \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_k\left(M^2\left(t_k^{(n)}\right)-M^2\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right)= \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_k\left(M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)^2\right).\end{aligned}$$

A V korlátos, így ha $V \triangleq \mathrm{Var}(M) \le c$, akkor

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(M^2(t)\right)\le \\ \le\ & \mathbf{E}\left(\sum_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\cdot\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right)\le \\ \le\ & \mathbf{E}\left(V(t)\cdot\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) \\ \le\ & c\cdot\mathbf{E}\left(\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right).\end{aligned}$$

M trajektóriái folytonosak, így egyenletesen is folytonosak a $[0,t]$ szakaszon, így

$$\lim_{n\to\infty}\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|=0.$$

Másrészt

$$\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\le V(t)\le c,$$

így a dominált konvergencia tétele miatt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right)=0.$$

Így $M(t) \overset{m.m}{=} 0$ minden t-re. Az M trajektóriái folytonosak, így majdnem minden ω esetén $M(t,\omega)=0$ minden t-re.

□

6.1. Wiener-folyamat visszatérése az origóba

Miként említettük, a Wiener-folyamatokkal kapcsolatos tételek negyrészt az Itô-formulára épülnek. Elsőként egy n-dimenziós Wiener-folyamat origóba való visszatéréseit vizsgáljuk meg. n-dimenziós Wiener-folyamaton olyan n-dimenziós folyamatot értünk, amelynek minden koordinátája Wiener-folyamat és az egyes koordináta folyamatok függetlenek. Hangsúlyozni kell, hogy folyamatok függetlensége azt jelenti, hogy a két folyamat bármelyik két $(w_1(t_k))_{k=1}^n$ és $(w_2(s_k))_{k=1}^m$ vektora független. Miként láttuk ha w Wiener-folyamat, akkor $[w](t)=t$. De mi lesz a koordináta-folyamatok keresztvariációja.

6.11 Lemma.
Ha w_i és w_j független Wiener-folyamatok, akkor a kvadratikus keresztvariációjuk nulla, vagyis $[w_1,w_2]=0$.

Bizonyítás: Ha w_1 és w_2 független Wiener-folyamatok, akkor a $(w_1\pm w_2)/\sqrt{2}$ szintén Wiener-folyamat. Érdemes hagsúlyozni, hogy ez csak a folyamatok függetlensége miatt igaz. Miként egy alábbi példában később látni fogjuk két Wiener-folyamat összege nem feltétlenül Wiener-folyamat. A szimmetria miatt elegendő például a $w \triangleq (w_1+w_2)/\sqrt{2}$ esettel foglalkozni. A w folytonos és

$w(0) = 0$, illetve minden t-re $\mathbf{E}(w(t)) = 0$. A függetlenség miatt a $w(t) - w(s)$ két független normális eloszlású változó összege és így normális eloszlású valószínűségi változó. Általánosabban a folyamatok függetlensége miatt a w Gauss-folyamat, vagyis a w minden végesdimenziós eloszlása normális, ugyanis két független normális eloszlású vektorváltozó lineáris kombinációja. Mivel független valószínűségi változók szórásnégyzetei összeadódnak, ezért a $w(t) - w(s)$ szórásnégyzete

$$\frac{1}{2}2(t-s) = t - s.$$

Ebből következően a w stacionárius növekményű. Normalitás esetén a korrelálatlanságból következik a függetlenség. A szórásokra már belátott összefüggésből következik, hogy a w növekményei függetlenek, így a w valóban Wiener-folyamat. Mivel a w Wiener-folyamat, ezért $[w](t) = t$. Mivel ez a $(w_1 - w_2)/\sqrt{2}$ folyamatra is igaz, ezért

$$[w_1, w_2] = \frac{[w_1 + w_2] - [w_1 - w_2]}{4} = 0$$

□

6.12 Definíció.
Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz. Ha valamely az U halmazon értelmezett f függvényre

$$\Delta f \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0,$$

akkor az f függvényt az U halmazon harmonikus függvénynek mondjuk.

Legyen f valamely tartományon harmonikus függvény. Ekkor a többdimenziós Wiener-folyamat kvadratikus keresztvarációjának képlete és az Itô-formula miatt

$$f(\mathbf{w}(t)) - f(\mathbf{w}(s)) = \sum_i \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{w}(u))\, dw_i(u),$$

ugyanis a másodrendű keresztvariációk mindegyike az imént elmondottak miatt nulla, a többi derivált pedig nullára összegződik az f feltételezett harmonikussága miatt. Erre az összefüggésre a későbbiekben gyakran fogunk hivatkozni.

Legyen $\mathbf{w}$ valamely $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ pontból elindított Wiener-folyamat. Ez azt jelenti, hogy egy „közönséges" Wiener-folyamatot eltoltunk egy $\mathbf{x}$ vektorral[1].

$$\vartheta \triangleq \inf \{\|\mathbf{w}(t)\| : t \geq 0\}.$$

Mi lesz a ϑ eloszlása?

6.13 Tétel. (Wiener-folyamat origóba való visszatérése)
A többdimenziós Wiener-folyamatra teljesülnek a következők: Ha $n \geq 3$, akkor az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamatra

$$\mathbf{P}(\vartheta \leq r) = \left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{n-2}, \quad ha \quad 0 \leq r \leq \|\mathbf{x}\|,$$

vagyis ha $n \geq 3$, akkor egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat pozitív valószínűséggel nem jut el az origó $r < \|\mathbf{x}\|$ sugarú környezetébe.

[1] Később az $\mathbf{x}$ helyett egy valószínűségi változót is fogunk írni. Vegyük észre, hogy az alábbiakban csak az $\mathbf{x}$ $\|\mathbf{x}\|$ hossza játszik csak szerepet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett $f \in C^2(U)$ függvény kielégíti a

$$\Delta f \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \tag{6.1}$$

Laplace-egyenletet. Legyen τ megállási idő. Ha az $\mathbf{x}$ pontból elindított $\mathbf{w}$ n-dimenziós Wiener-folyamatra a $\mathbf{w}^\tau$ megállított folyamat az U halmazon belül marad, akkor az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{w}^\tau) \bullet \left[w_i^\tau, w_j^\tau\right], \end{aligned}$$

A vegyes tagok esetén a kvadratikus keresztvariáció az imént belátott lemma miatt nulla[2], az f kielégíti a Laplace-egyenletet, így a formula

$$f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau \tag{6.2}$$

módon egyszerűsödik. Tegyük fel, hogy $\tau < \infty$ és a $f(\mathbf{w})$ a $[0, \tau]$ véletlen szakaszon korlátos. Ilyenkor a (6.2) sorban szereplő sztochasztikus integrálok martingálok lesznek[3]. A megállási opciókról szóló tétel alapján tetszőleges $T < \infty$ időpontra, felhasználva, hogy a $\mathbf{w}$ az $\mathbf{x}$ pontból lett elindítva

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(T \wedge \tau))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{w}(0))) = \mathbf{E}(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Az $f(\mathbf{w}^\tau)$ korlátossága és a $\tau < \infty$ miatt ha $T \to \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau))) = f(\mathbf{x}). \tag{6.3}$$

A tételt a (6.3) sorban szereplő Dinkin-formulának is nevezett összefüggésből már könnyen igazolni tudjuk.

2. Tegyük fel, hogy az $\|\mathbf{x}\|$ a $0 < r < R < \infty$ sugarak közé esik. Wiener-folyamatok trajektóriái a $t \geq 0$ félegyenesen majdnem minden kimenetelre nem korlátosak és minden kimenetelre folytonosak, ezért a külső körből a $\mathbf{w}$ egy valószínűséggel kilép. A kérdés csak az, hogy a belső vagy a külső határon fogja-e a folyamat a

$$B \doteq \{\mathbf{u} : r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R\}$$

gyűrűt elhagyni. Jelölje τ_B a B gyűrűből való kilépés időpontját.

3. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen

$$f(\mathbf{x}) \doteq \|\mathbf{x}\|^{2-n}.$$

Az f nyilván az $U \doteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon van értelmezve. Elemi számolással könnyen megmutatható. hogy az U halmazon az f kielégíti a Laplace-egyenletet. Az $r > 0$ miatt az f a B halmazon korlátos, így az $f(\mathbf{w}^{\tau_B})$ is korlátos, így a Dinkin–formula alapján

$$\mathbf{E}(f(\mathbf{w}(\tau_B))) = f(\mathbf{x}). \tag{6.4}$$

Ezt és az f konkrét alakját felhasználva

$$r^{2-n}\mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r) + R^{2-n}(1 - \mathbf{P}(\|\mathbf{w}(\tau_B)\| = r)) = \|\mathbf{x}\|^{2-n},$$

---

[2] Ki kell még használni a kvadratikus variáció megállítására vonatkozó $[M^\tau] = [M]^\tau$ formulát.

[3] Általában az $f(\mathbf{w})$ egy lokális martingál. Ha az $f(\mathbf{w}^\tau)$ korlátos, akkor egy korlátos lokális martingál, így valódi martingál.

és

$$\mathbf{P}\left(\left\|\mathbf{w}\left(\tau_B\right)\right\| = r\right) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}}.$$

Ha $R \to \infty$, akkor, felhasználva, hogy $n > 2$, a jobb oldal határértéke $\left(r / \|\mathbf{x}\|\right)^{n-2}$. Ha A_R jelöli azt az eseményt, hogy R sugár esetén a belső oldalon lép ki a folyamat, akkor nyilván ha $R_1 \leq R_2$, akkor $A_{R_1} \subseteq A_{R_2}$, ugyanis ha a kisebb sugár esetén már belül kilép, akkor a nagyobb sugár esetén is ott fog kilépni. (Nagyobb sugár esetén valószínűbb, hogy alul fog kilépni.) Ebből az A_R monoton nő és

$$\left(\frac{r}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{n-2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n}}{r^{2-n}} = \lim_{R\to\infty} \mathbf{P}\left(A_R\right) = \mathbf{P}\left(\cup_R A_R\right).$$

Ha egy ω kimenetelre a trajektória véges idő után belemetsz az r sugarú gömbbe, akkor a bemetszés időpontjáig felvett maximumánál nagyobb számot választva R-nek $\omega \in A_R \subseteq \cup_R A_R$. Megfordítva ha $\omega \in \cup_R A_R$, akkor alkalmas R-re $\omega \in A_R$, így az ω-ra vett trajektória belemetsz a r sugarú gömbbe. Így az $\left(r / \|\mathbf{x}\|\right)^{n-2}$ éppen annak a valószínűsége, hogy az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított Wiener-folyamat belemetsz az $r \leq \|\mathbf{x}\|$ sugarú körbe.

□

Vegyük észre, hogy az előző tételben az $\mathbf{x}$ vektornak nem volt szerepe. Valójában csak az $\|\mathbf{x}\|$ nagyságának van szerepe, egyébiránt az $\mathbf{x}$ lehet az $x = \|\mathbf{x}\|$ sugarú gömbfelszín véletlenül választott pontja. Ez az észrevétel alapvető szerepet játszik a következő érdekes állításban.

6.14 Állítás.
Ha $n \geq 3$ és $\mathbf{w}$ n-dimenziós Wiener-folyamat, akkor $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty$.

Bizonyítás: Legyen $r > 0$ tetszőleges és legyen $a \geq r$. Legyen továbbá

$$\tau_a \triangleq \inf\left\{t : \|\mathbf{w}(t)\| \geq a\right\}.$$

Mivel a Wiener-folyamatok trajektóriái majdnem minden kimenetelre nem korlátosak, ezért majdnem mindenhol

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t)\| = \infty,$$

így nyilván majdnem mindenhol $\tau_a < \infty$. Az erős Markov-tulajdonság miatt a

$$\mathbf{w}^*(t) \triangleq \left(\mathbf{w}\left(t+\tau_a\right) - \mathbf{w}\left(\tau_a\right)\right) + \mathbf{w}\left(\tau_a\right), \quad t \geq 0$$

szintén Wiener-folyamat, amelyik a

$$\mathbf{w}\left(\tau_a\right) \in \left\{\|\mathbf{u}\| = a\right\}$$

véletlen pontból indul. Mivel $n \geq 3$

$$\mathbf{P}\left(\exists t \geq \tau_a, \|\mathbf{w}(t)\| \leq r\right) = \mathbf{P}\left(\exists t \geq 0, \|\mathbf{w}^*(t)\| \leq r\right) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

Ha $a \nearrow \infty$ akkor ez a valószínűség nullához tart. Tegyük fel, hogy $a_k \nearrow \infty$. Ha A_k az olyan kimenetelek halmaza, amelyekre a $\mathbf{w}$ a τ_{a_k} után visszatér az r sugarú gömbbe, akkor $A_{k+1} \subseteq A_k$. Annak a valószínűsége, hogy a $\mathbf{w}$ a végtelen sok τ_{a_n} után visszatér az $\left\{\|\mathbf{u}\| \leq r\right\}$ gömbe

$$\mathbf{P}\left(\cap_k A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(A_k\right) = 0.$$

Így egy valószínűséggel minden ω-hoz van olyan $k \triangleq k(\omega)$, hogy

$$\mathbf{w}(t,\omega) \notin \left\{\|\mathbf{u}\| \leq r\right\} \quad t \geq \tau_k(\omega).$$

Így egy valószínűséggel[4] ha $t \nearrow \infty$, akkor $\|w(t,\omega)\| \to \infty$.

□

[4] Legyen $r \triangleq 1, 2, \ldots$.

6.2. Folytonos Lévy-folyamatok és a centrális határeloszlás tétele

Legyen X egy folytonos Lévy-folyamat. Mivel az X folytonos, ezért az X összes momentuma véges. Ebből következően az $X(t)$ változónak minden t időpontban van várható értéke. Következésképpen ha m jelöli az $X(1)$ várható értékét, akkor az $X(t) - t \cdot m$ martingál. Érdemes hangsúlyozni, hogy annak igazolásához, hogy az $X(t)$ várható értéke éppen $t \cdot m$ vagy fel kell használni hogy a filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, így az $X(t) - \mathbf{E}(X(t))$ logikai martingálnak van várható értéke, vagy fel kell használni, hogy véges időszakon a második momentumok halmaza korlátos, így az $(X(t))_t$ család minden véges időtartományon egyenletesen integrálható. Az $X(t) - t \cdot m$ martingál voltából következik, hogy az X folytonos szemimartingál. A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $m = 0$. A kvadratikus variáció definíciója miatt az $[X]$ szintén folytonos Lévy-folyamat. A független és stacionárius növekedés feltétele következik abból, hogy a kvadratikus variáció a közelítő négyzetösszegek határértéke és a Lévy-tulajdonság miatt a diszjunkt szakaszokhoz tartozó közelítő négyzetösszegek függetlenek és az eloszlásuk csak az időszak hosszától függ[5]. A kvadratikus variáció folytonossága pedig a parciális integrálás formulája miatt a sztochasztikus integrálok folytonos integrátor szerinti folytonosságának következménye. Ez másképpen azt jelenti, hogy az

$$Y(t) \triangleq [X](t) - \mathbf{E}([X](t)) = [X](t) - t \cdot \mathbf{E}([X](1))$$

kifejezés ismételten folytonos martingál. Az Y mint két monoton növekedő függvény különbsége véges variációjú. A véges variációjú folytonos martingálok konstansak, így

$$[X](t) = \mathbf{E}([X](t)) = a \cdot t.$$

Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s))dX(s) - \\ &\quad -\frac{1}{2}u^2 \int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s). \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos és az X négyzetesen integrálható, következésképpen a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és felhasználva, hogy most a sztochasztikus integrál várható értéke a martingál tulajdonság miatt nulla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) - 1 &= -\frac{1}{2}u^2 \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d[X](s)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s))d(as)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t \mathbf{E}(\exp(iuX(s)))\, ds. \end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u,t) \triangleq \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$ jelölést, akkor ez

$$\varphi(u,t) - 1 = -\frac{1}{2}u^2 a \int_0^t \varphi(u,s)\, ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt} = -\frac{1}{2}u^2 a \varphi(u,t).$$

[5]Felmerülhet a kérdés, hogy a határérték képzése nem okoz-e gondot, vagyis azonos eloszlású változók sztochasztikus konvergenciában vett határértékének eloszlása azonos-e? Ezt a legegyszerűbben a Fourier-transzformáció és az unicitási tétel segítségével igazolhatjuk. Mivel a sorozat tagjainak azonos az eloszlása a Fourier-transzformáltjaik is azonosak, és a majorált konvergencia tétel miatt a határértékek Fourier transzformáltja is azonos, így a határértékek eloszlása is azonos.

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi(u,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2at\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva

$$X(t) \cong N\left(0, \sqrt{at}\right).$$

Ebből, mivel az X Lévy-folyamat, következően az $X/\sqrt{a}$ Wiener-folyamat. Az általános esetben m nem nulla, így teljesül a következő:

6.15 Állítás.
Minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend lineáris kombinációja.

6.3. A Lévy-féle karakterizációs tétel

A Lévy-féle karakterizációs tétel hasonló az imént belátott állításhoz: A Wiener-folyamatokat a folytonos lokális martingálok körében karakterizálja. Ha X folytonos lokális martingál és ha $[X](t) = t$, akkor a már bemutatott módon belátható, hogy $X(t) \cong N\left(0, \sqrt{t}\right)$. A gondolatmenetet az $X(t+s) - X(s)$ alakú újraindított folyamatokra alkalmazva ebből könnyen belátható, hogy növekmények eloszlása $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ebből azonban még nem következik, hogy a folyamat Wiener-folyamat, ugyanis nem tudjuk, hogy a növekmények függetlenek vagy sem. A szórásokra vonatkozó képletből belátható, hogy a növekmények korrelálatlanok, ugyanis teljesül a

$$\mathbf{D}^2\left(X(t+s)\right) = \mathbf{D}^2\left(X(t)\right) + \mathbf{D}^2\left(X(s)\right).$$

Sajnos azonban normális eloszlású változók korrelálatlansága csak akkor implikálja a függetlenséget, ha az együttes eloszlás is normális. Írjuk fel az X exponenciális martingálját[6]:

$$\frac{\exp\left(iuX(t)\right)}{\varphi(u,t)} = \frac{\exp\left(iuX(t)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right)} = \exp\left(iuX(t) + \frac{1}{2}u^2t\right).$$

Mivel $[X](t) = t$ az Itô-formulával azonnal látható, hogy a kifejezés lokális martingál. Mivel ugyanakkor minden véges szakaszon egyenletesen korlátos, ezért nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál is. Ezen a ponton érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy tetszőleges folyamat esetén az

$$\frac{\exp\left(iuX(t)\right)}{\varphi(u,t)}$$

exponenciális martingál nem lesz martingál sőt lokális martingál sem. Az Itô-formulából azonnal következik, hogy egy L folytonos lokális martingál esetén az

$$\exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right)$$

[6] Mivel tudjuk, hogy a minden időpontban az eloszlás $N\left(0, \sqrt{t}\right)$ ezért ismerjük a Fourier-transzformáltat.

kifejezés lokális martingál és ezt szokás a lokális martingál exponenciális martingáljának mondani. Valóban az exponenciális függvény deriválási szabályát kihasználva[7]

$$
\begin{gathered}
Z(t) - Z(0) = \\
= \int_0^t Zd\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L - \frac{1}{2}[L]\right] = \\
= \int_0^t Zd\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) + \frac{1}{2}\int_0^t Zd[L] = \\
= \int_0^t ZdL,
\end{gathered}
$$

amely kifejezés egy folytonos folyamat folytonos lokális martingál szerint sztochasztikus integrálja, vagyis lokális martingál. Nyilván tetszőleges z-re az

$$
\exp\left(zL - \frac{1}{2}[zL]\right) = \exp\left(zL - \frac{1}{2}z^2[L]\right)
$$

is lokális martingál. A jelen példában a $z = iu$ helyettesítéssel kapjuk az

$$
\exp\left(iuX(t) + \frac{1}{2}u^2 t\right)
$$

kifejezést. Vagyis kihasználva, hogy az $X(t)$ eloszlása normális az exponenciális martingál két különböző definíciója egybeesik. Mivel az

$$
\frac{\exp(iuX)}{\varphi(u,t)}
$$

kifejezés martingál, ezért ha $s < t$, akkor

$$
\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u,t)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{\exp(iuX(s))}{\varphi(u,s)}.
$$

Ezt átrendezve

$$
\mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s))) \mid \mathcal{F}_s) = \frac{\varphi(u,t)}{\varphi(u,s)} = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2(t-s)\right).
$$

A feltételes várható érték definícióját felírva minden $F \in \mathcal{F}_s$ halmazra

$$
\int_F \exp(iu(X(t) - X(s)))\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}(F) \cdot \mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s)))).
$$

A monoton osztály tétel segítségével az $\exp(iux)$ helyébe tetszőleges Borel-mérhető halmaz karakterisztikus függvénye írható, így

$$
\mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\} \cap F) = \mathbf{P}(F) \cdot \mathbf{P}(\{X(t) - X(s) \in B\})
$$

vagyis az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra és az $X(t) - X(s)$ növekmények függetlenek, vagyis az X független növekményű. Evvel beláttuk a következő tételt:

6.16 Tétel. (Lévy-féle karakterizációs tétel)
Ha X olyan folytonos lokális martingál, amelyre $X(0) = 0$ és $[X](t) = t$, akkor az X Wiener-folyamat.

[7] Vegyük észre, hogy az L folytonossága miatt $[L,[L]] = 0$, ugyanis az $[L]$ monoton nő, így korlátos változású. A parciális integrálás formulája és a sztochasztikus integrál folytonossága miatt az $[L]$ szintén folytonos. Ezért a már jelzett okokból az $[L]$ kvadratikus variációja, vagyis az $[[L]]$ szintén nulla. Így $\left[L - \frac{1}{2}[L]\right] = [L]$.

6.17 Példa.
A $\operatorname{sgn}(w) \bullet w$ *integrál Wiener-folyamat*[8].

A sztochasztikus integrál konstrukciója szerint a folyamat folytonos és lokális martingál. A kvadratikus variációja

$$\int_0^t (\operatorname{sgn}(w))^2 (s)\, ds = t.$$

□

6.18 Példa.
Lévy-folyamatok összege nem feltétlenül Lévy-folyamat[9].

Legyen w Wiener folyamat és legyen

$$X(t) \triangleq \int_0^t \operatorname{sgn}(w(s))\, dw(s).$$

Az X szintén Wiener-folyamat. A

$$Z \triangleq w + X = 1 \bullet w + \operatorname{sgn}(w) \bullet w = (1 + \operatorname{sgn}(w)) \bullet w$$

mint folytonos martingálok összege szintén folytonos martingál az eredeti közös $\mathcal{F}$ filtrációra nézve.

$$[Z](t) = \int_0^t (1 + \operatorname{sgn}(w(s)))^2 (s)\, ds$$

amely kifejezés nem determinisztikus. Így a Z nem lehet Wiener-folyamat. De mivel minden folytonos Lévy-folyamat egy Wiener-folyamat és egy lineáris trend összege, ezért a Z nem lehet Lévy-folyamat.

□

6.4. Parciális differenciálegyenletek

Ebben a pontban röviden és vázlatosan áttekintjük a pénzügyi alkalmazásokban fontos szerepet játszó Black–Scholes-féle differenciálegyenletet. A továbbiakban a sztochasztikus integrál jelölés helyett a pénzügyi irodalomban szokásos differenciális jelölést használjuk. Ennek megfelelően a

$$dX = Y dZ$$

típusú jelölések azt jelentik, hogy minden $s < t$ esetén teljesül az

$$X(t) - X(s) = \int_s^t Y dZ$$

integrálegyenlet.

[8] A $\operatorname{sgn}(x)$ fügvény definíciója a sztochasztikus analízisben némiképpen eltér a szokásostól. Ha $x \leq 0$, akkor $\operatorname{sgn}(x) \triangleq -1$, ha $x > 0$, akkor $\operatorname{sgn}(x) \triangleq +1$. Így a függvény balról folytonos. Ebből következően a $\operatorname{sgn}(w)$ integrandus balról reguláris és korlátos. Megmutatható, hogy az Itô–Stieltjes konstrukció lokális martingálok esetén is kiterjeszthető folytonos integrandusokról balról reguláris integrandusokra. Ehhez elegendő kiterjeszteni, valahogyan, az integrált nem folytonos függvényekre és belátni a majorált konvergencia tételt, amely segítségével már belátható, hogy a kiterjesztett integrál a balról reguláris integrandusokra az Itô-féle közelítő összegek határértéke.

[9] A példa kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy szemimartingálok összeg szemimartingál. Szemimartingálokra az elődleges példát éppen a Lévy-folyamatok szolgáltatják. A probléma pontosan az, hogy pusztán a Lévy-folyamatokat tekintve nem kapunk lineáris teret.

6.4.1. Lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek

A Black–Scholes-modellben a részvények ármozgását a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad S(t) = s \tag{6.5}$$

egyenlettel írjuk le. A jelölésen miként említettük a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$S(T) - S(t) = \int_t^T \mu \cdot S(u)\, du + \int_t^T \sigma \cdot S(u)\, dw(u)$$

integrálegyenlet értendő. Általában a sztochasztikus differenciálegyenleteket igen nehéz megoldani. Ebben az esetben azonban a megoldás explicite megadható:

$$S(T) = s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T - t) + \sigma \cdot w(T - t)\right). \tag{6.6}$$

Valóban, az Itô-formula időtől függő verziója alapján

$$\begin{aligned} & S(T) - S(t) = \\ = \; & \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(u)\, du + \sigma \int_t^T S(u)\, dw + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2 S(u)\, du = \\ = \; & \mu \int_t^T S(u)\, du + \sigma \int_t^T S(u)\, dw. \end{aligned}$$

6.19 Példa.
Határozzuk meg a (6.5) megoldásának várható értékét.

Az egyenlet megoldását a T pontban a (6.6) képlet adja meg. A képletből világos, hogy a megoldás lognormális eloszlást követ. A lognormális eloszlás várható értékének képlete alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S(T)) &= s\mathbf{E}\left(\exp\left(N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right)\right)\right) = \\ &= s \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t)\right) = \\ &= s \exp(\mu(T - t)). \end{aligned}$$

□

6.4.2. A Black–Scholes egyenlet

Legyen az S részvények mellett adott egy derivatív termék, amely a T időpontban $\Phi(S(T))$ összeget fizet. Mi lesz a derivatív termék ára? Mivel az S árat és a derivatív termék által a T időpontban megvalósuló kifizetést egy matematikai képlet köti össze feltehetőleg ez kiszámolható. Jelölje az árat megadó kifejezést f. Tegyük fel, hogy az f csak a t időpont és az aktuális $S(t)$ ár függvénye[10]. Vagyis tegyük fel, hogy adott egy $f(t, x)$ függvény, amelyre tetszőleges $0 \leq t \leq T$ időpont esetén az ár éppen $f(t, S(t))$. Az f értékét a T időpontban ismerjük[11], de mi a $t = 0$ időpontban vett értékét szeretnénk megtudni, vagyis az $f(0, x)$ értékre vagyunk kiváncsiak. Tegyük fel, hogy az $f(t, x)$ függvény elég „jó”, így az f függvényre alkalmazható az Itô-formula.

A tett feltételek miatt az időtől függő Itô-formula szerint a derivatíva árát megadó f függvény kielégíti az

$$f(T.S(T)) - f(t.S(t)) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s} ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} dS + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} d[S]$$

[10] Ezek igen erős megkötések, de ez volt a szerzők eredeti gondolatmenete. Később ezt, más szerzők nagyban egyszerűsítették, de ennek tárgyalása messze vezetne.
[11] $f(T, x) = \Phi(x)$.

integrálegyenletet. A korlátos változású integrálok kvadratikus variációja nulla, így a polaritási formula alapján

$$\begin{aligned}[S] &= \left[\mu\int Sdt+\sigma\int Sdw\right]=\left[\sigma\int Sdw\right]=\sigma^2\int S^2d\left[w\right]= \\ &= \sigma^2\int S^2ds\end{aligned}$$

összefüggést felhasználva az integrálegyenletet a szokásos differenciális alakba átírva

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2S^2\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}dS.$$

Kivonva belőle az árak mozgását leíró (6.5) sor $\partial f/\partial x$-szeresét a jobb oldalon megszabadulhatunk a misztikus dw tagtól[12].

$$df-\frac{\partial f}{\partial x}dS=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2S^2\right)dt.$$

Persze ezt sem tűnik jobbnak. A probléma megoldása egy remek közgazdasági észrevétel!! A jobb oldalon álló kifejezés minden t időpontban ismert, ugyanis nem tartalmazza a dw tagot. Ekkor a másik oldalnak is determinisztikusnak kell lenni. A df az f megváltozása, a dS az S megváltozása, így a

$$df-\frac{\partial f}{\partial x}dS$$

felfogható, mint egy 1 darab derivatíva és $-\partial f/\partial x$ darab részvényből álló portfolió rövid idő alatt bekövetkező értékváltozása. Az így kapott portfolió értéke

$$V\left(t\right)=1\cdot f\left(t,S\left(t\right)\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,S\left(t\right)\right)\cdot S\left(t\right).$$

Mivel a portfolió nem függ a dw-től, ezért deteminisztikus, így a hozama éppen az r kockázatmentes hozam. Vagyis

$$dV=rVdt.$$

A V konkrét értékét visszaírva

$$df-\frac{\partial f}{\partial x}dS\doteq dV=rVdt\doteq r\left(f-\frac{\partial f}{\partial x}S\right)dt.$$

Ezt visszaírva és a dt kifejezéssel osztva a

$$\frac{\partial f}{\partial s}+r\frac{\partial f}{\partial s}S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2S^2=rf \tag{6.7}$$

parciális differenciálegyenletet kapjuk. Emlékeztetünk, hogy teljesülni kell az

$$f\left(T,S\left(T\right)\right)=\Phi\left(S\left(T\right)\right)$$

feltételnek is. Ezt szokás Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletnek (PDE) mondani. Ez speciális esete a

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+rf+k=0, \\ f\left(T,x\right)=\Phi\left(x\right)\end{gathered}$$

egyenletnek, ahol μ,σ,k a keresett f függvényhez hasonlóan a (t,x) független változók függvényei, az r pedig konstans.

[12] A dolog lényege, hogy persze a μ is kiesik.

6.4.3. Parciális és sztochasztikus differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenlet megoldását sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) segítségével adjuk meg. Először tekintsük a következő úgynevezett Cauchy-problémát[13]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k=0, \qquad (6.8)$$
$$f(T,x)=\Phi(x).$$

A parciális differenciálegyenlethez formálisan[14] rendeljük hozzá a

$$\begin{aligned} dX(s) &= \mu(s,X(s))\,ds+\sigma(s,X(s))\,dw(s), \\ X(t) &= x \end{aligned}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az idő jelölésére a t helyébe s kerül, az f függvényben szereplő t időparaméter és az x helyparaméter a kezdeti feltételben jelenik meg. Ismételten megjegyezzük, hogy a sztochasztikus differenciálegyenletre felírt, sztochasztikus analízisben megszokott jelölés valójában a tetszőleges $t<T$ időpontokra teljesülő

$$X(T)-x=X(T)-X(t)=\int_t^T\mu(s,X(s))\,ds+\int_t^T\sigma(s,X(s))\,dw(s)$$

integrálegyenlőség teljesülését jelenti. Vezessük be az úgynevezett Dinkin-operátort, amely a PDE-ben szereplő x szerint vett deriváltakat tartalmazó tagokból áll:

$$Af\mathrel{\hat{=}}\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Az A segítségével a (6.8) PDE

$$\frac{\partial f}{\partial t}+Af+k=0,\quad f(T,x)=\Phi(x) \qquad (6.9)$$

módon írható. Legyen[15] $f(t,x)\in C^2$ az egyenlet megoldása. Az időtől függő Itô-formula alapján

$$df=\frac{\partial f}{\partial s}ds+\frac{\partial f}{\partial x}dX+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d[X],$$

ugyanis miként korábban láttuk a másodrendű tagban a többi kvadratikus variáció nulla. Az X képletét a dX tagba behelyettesítve az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x}dX=\frac{\partial f}{\partial x}(\mu ds+\sigma dw)=\mu\frac{\partial f}{\partial x}ds+\sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

Az X két tag összege, így az

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

nevezetes összefüggés triviális alkalmazásával

$$[X]=[\mu ds+\sigma dw]=[\mu ds]+2[\mu ds,\sigma dw]+[\sigma dw].$$

Miként láttuk, ha a kvadratikus variációban valamelyik kifejezés korlátos változású, akkor a kvadratikus variáció nulla, így[16]

$$[X]=[\sigma dw].$$

[13]Vegyük észre, hogy a feladat homogén, vagyis nem tartalmazza az f függvényt, csak a deriváltjait, vagyis az rf tagot elhagytuk.

[14]Hangsúlyozni kell, hogy a hozzárendelés formális, következésképpen mechanikus.

[15]Az $f\in C^2$ jelölés azt jelenti, hogy az f kétszer folytonosan deriválható.

[16]A μds kifejezés korlátos változású, ugyanis a differencia jelölés mögött az $\int_0^t\mu ds$ integrál van, amely teljes megváltozása, mint tudjuk, $\int_0^t|\mu|\,ds<\infty$.

A sztochasztikus integrálok kvadratikus variációjának képlete miatt

$$[\sigma dw](t) \stackrel{\circ}{=} \left[\int_0^t \sigma dw\right] = \int_0^t \sigma^2 d[w] = \int_0^t \sigma^2 ds.$$

A Dinkin-operátor mint jelölés segítségével a kifejezés

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial s}ds + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d[X] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}ds + \mu\frac{\partial f}{\partial x}ds + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}ds = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)ds + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af\right)ds + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw. \end{aligned}$$

Az egyenlőséget integrálként részletesen kírva és felhasználva, hogy az f megoldása a PDE-nek, vagyis teljesül a (6.9):

$$\begin{aligned} f(T,X(T)) - f(t,X(t)) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af\right)ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw = \\ &= \int_t^T -kds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw. \end{aligned}$$

Ha a második tag elég jó[17], akkor mind a két oldalon várható értéket véve, a megszokott módon felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(T,X(T)) - f(t,X(t))) &= \mathbf{E}\left(\int_t^T -kds\right) + \mathbf{E}\left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_t^T -kds\right). \end{aligned}$$

Mivel az $X(s)$ eleget tesz az SDE-nek, ezért a kezdeti feltétel miatt $X(t) = x$, tehát az

$$f(t,X(t)) = f(t,x)$$

konstans. Az összefüggést átalakítva

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(T,X(T)) - f(t,X(t))) &= \mathbf{E}(f(T,X(T)) - f(t,x)) = \\ &= \mathbf{E}(f(T,X(T))) - f(t,x) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_t^T -k(s,X(s))\,ds\right). \end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \mathbf{E}(f(T,X(T))) + \mathbf{E}\left(\int_t^T k(s,X(s))\,ds\right) = \\ &= \mathbf{E}(\Phi(X(T))) + \mathbf{E}\left(\int_t^T k(s,X(s))\,ds\right), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az f megoldása a PDE-nek, tehát minden y-ra

$$f(T,y) = \Phi(y),$$

[17] Vagyis a sztochasztikus integrál nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál.

így

$$f\left(T,X\left(T\right)\right)=\Phi\left(X\left(T\right)\right).$$

A közgazdasági alkalmazásokban $k=0$, így ilyenkor

$$f\left(t,x\right)=\mathbf{E}\left(\Phi\left(X\left(T\right)\right)\right),$$

vagyis a parciális differenciálegyenlet megoldása, a T időpontban levő peremérték segítségével várható értékeként számolható. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{E}$ várható érték a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó valószínűség szerint értendő. A sztochasztikus differenciálegyenlet egy matematikai segédeszköz, amely közvetlenül a parciális differenciálegyenlethez tartozik és ezért teljesen független attól, hogy miként jutottunk a parciális differenciálegyenlethez. A derivatív árazás elméletében a parciális differenciálegyenletet egy másik sztochasztikus differenciálegyenletből vezetjük le, amely egyenlet az árak mozgását írja le és amely egyenlet a statisztikailag megfigyelhető valószínűségi mező felett van értelmezve. A parciális differenciálegyenlet megoldásakor használt segédmező azonban egy másik valószínűségi mező[18], amelyet szokás kockázatmentes valószínűségi mezőnek nevezni és amely elvileg semmilyen kapcsolatban sincsen az eredeti problémában szereplő statisztikailag megfigyelt adatokra támaszkodó valószínűségi mezővel.

Térjünk visssza az eredeti

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}+k+rf=0,\quad f\left(T,x\right)=\Phi\left(x\right)$$

inhomogén PDE-re. Az inhomogén egyenlet helyett vegyük a

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}h}{\partial x^{2}}+k\exp\left(rt\right)=0,\quad h\left(T,x\right)=\exp\left(rT\right)\Phi\left(x\right)=\Psi\left(x\right)$$

homogén egyenletet. Vezessük be az

$$f\left(t,x\right)=\exp\left(-rt\right)h\left(t,x\right)$$

függvényt, vagyis

$$h\left(t,x\right)=\exp\left(rt\right)f\left(t,x\right).$$

Mivel

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(rt\right)f\left(t,x\right)=r\exp\left(rt\right)f\left(t,x\right)+\exp\left(rt\right)\frac{\partial}{\partial t}f\left(t,x\right),$$

ezért

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial h}{\partial t}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}h}{\partial x^{2}}+k\exp\left(rt\right)=\\&=\exp\left(rt\right)\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}+rf+k\right],\end{aligned}$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}+rf+k=0.$$

A már bemutatott módon a homogén egyenletet megoldva

$$\begin{aligned}h\left(t,x\right)&=\mathbf{E}\left(h\left(T,X\left(T\right)\right)\right)+\mathbf{E}\left(\int_{t}^{T}\exp\left(rs\right)k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right)=\\&=\mathbf{E}\left(\Psi\left(X\left(T\right)\right)\right)+\mathbf{E}\left(\int_{t}^{T}\exp\left(rs\right)k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right)=\\&=\exp\left(rT\right)\mathbf{E}\left(\Phi\left(X\left(T\right)\right)\right)+\mathbf{E}\left(\int_{t}^{T}\exp\left(rs\right)k\left(s,X\left(s\right)\right)ds\right),\end{aligned}$$

[18]Amely csak a matematikusok által kreált fantáziavilágban létezik.

az inhomogén egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \exp(r(T-t))\,\mathbf{E}(\Phi(X(T))) + \\ &+ \exp(-rt)\,\mathbf{E}\left(\int_t^T \exp(rs)\,k(s,X(s))\,ds\right). \end{aligned}$$

Ha $k=0$, akkor

$$f(t,x) = \exp(r(T-t))\,\mathbf{E}(\Phi(X(T))).$$

6.4.4. A derivatív árazás alapképlete

Vegyük észre, hogy a Black–Scholes-féle egyenletben szereplő r kamatláb a mi jelölésünk szerint éppen $-r$, így az eredeti jelölésre áttérve

$$f(t,x) = \exp(-r(T-t))\,\mathbf{E}(\Phi(X(T))),$$

vagyis az Black–Scholes-féle egyenlet megoldása, a derivatíva jelenlegi t időpontban vett ára, a T jövőbeli $\Phi(X(T))$ kifizetés diszkontált várható értéke, ahol a várható értéket, illetve az $X(T)$ változót a parciális differenciálegyenlethez rendelt fantáziavilágban, az úgynevezett kockázatmentes világban kell venni[19].

6.4.5. Példák

Tekintsünk néhány példát:

1. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(T,x) = x^2$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet

$$dX(s) = 0\cdot ds + \sigma dw(s), \quad X(t) = x.$$

Az egyenlet könnyen megoldható, a megoldása

$$X(s) = x + \sigma(w(s) - w(t)).$$

A Wiener-folyamat tulajdonságai alapján $X(s) \cong N\left(x, \sigma\sqrt{s-t}\right)$. Ezt felhasználva a megoldás

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(X^2(T)\right) = \mathbf{D}^2(X(T)) + \mathbf{E}^2(X(T)) = \\ &= \sigma^2(T-t) + x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2 + \sigma^2 = 0 \\ h(T,x) &= \sigma^2(T-T) + x^2 = x^2. \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + x = 0, \quad h(T,x) = \ln x^2$$

PDE-tet.

[19] Az eredeti Black–Scholes modelben az árak jelölése S, mi következetesen X-szel jelöljük a sztochasztikus differenciálegyenlet változóját hangsúlyozva, hogy a kettőnek semmi köze egymáshoz.

Hagyjuk először el a $k(t,x) = x$ konstans tagot, vagyis tekintsük a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad h(T,x) = \ln x^2$$

egyenletet. Rendeljük hozzá a

$$dX(s) = 0 \cdot ds + X(s)\,dw(s) = X(s)\,dw(s), \quad X(t) = x,$$

SDE-tet. Az egyenlet ismételten könnyen megoldható. A (6.6) képlet alapján

$$X(s) = x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t) + w(s-t)\right).$$

Az $X(T)$ változót a $\Phi(x) = \ln x^2$ függvénybe betéve

$$\ln\left(X^2(T)\right) = -(T-t) + 2N\left(0, \sqrt{T-t}\right) + \ln x^2,$$

amiből

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(-(T-t) + 2N\left(0,\sqrt{T-t}\right) + \ln x^2\right) = \\ &= (t-T) + \ln x^2. \end{aligned}$$

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)' = \\ &= 1 + x^2\left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= 1 + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0. \\ h(T,x) &= (T-T) + \ln x^2 = \\ &= \ln x^2. \end{aligned}$$

Az eredeti egyenletet az

$$f(t,x) = \mathbf{E}(\Phi(X(T))) + \int_t^T \mathbf{E}(k(s,X(s)))\,ds$$

általános formula alapján oldjuk meg, ahol $k(s,x)$ az általános szabad konstans tag a (6.8) egyenletben[20]. A lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k(s,X(s))) &= \mathbf{E}(X(s)) = \mathbf{E}\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t) + w(s-t)\right)\right) \\ &= x\exp\left(-\frac{1}{2}(s-t) + \frac{1}{2}(s-t)\right) = x, \end{aligned}$$

amiből

$$\int_t^T \mathbf{E}(k(s,X(s)))\,ds = x\int_t^T 1ds = x(T-t).$$

Ez alapján

$$f(t,x) = (t-T) + \ln x^2 + x(T-t).$$

[20]Feltéve, hogy a két integrál felcserélhető, de ezt igen általános feltételek mellett meg lehet tenni. A legegyszerűbben ellenőrizhető feltétel, hogy a kettős integrálban szereplő integrandus nem negatív.

Valóban

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}+x &= 1-x+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x^2}2x\right)'+x= \\ &= 1+x^2\left(\frac{1}{x}\right)'=0\end{aligned}$$

$$f(T,x)=\ln x^2.$$

3. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 0, \\ h(T,x) &= x^2\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a sztochasztikus differenciálegyenletet.

$$dX(s)=1ds+\sigma dw(s), \quad X(t)=x.$$

Az egyenlet

$$\begin{aligned}X(T)-x &= \int_t^T ds+\sigma\int_t^T dw=T-t+\sigma[w(T)-w(t)]\cong \\ &\cong N\left(T-t,\sigma\sqrt{T-t}\right).\end{aligned}$$

A megoldóképlet alapján

$$h(t,x)=\mathbf{E}\left(N^2\left(x+T-t,\sigma\sqrt{T-t}\right)\right)=\sigma^2(T-t)+(x+T-t)^2.$$

Valóban

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\sigma^2+2(x+T-t)(-1)+ \\ &\quad +2(x+T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2 2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$h(T,x)=x^2.$$

4. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}+x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} &= 0, \\ h(T,x) &= \ln x^2\end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s)=X(s)\,ds+X(s)\,dw(s), \quad X(t)=x$$

sztochasztikus egyenletet, amely lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s)=x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t)+w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right) = \ln x^2 + \mathbf{E}\left(N\left(T-t, \sqrt{T-t}\right)\right) = \\ &= \ln x^2 + T - t. \end{aligned}$$

Valóban a peremfeltétel triviálisan teljesül, és

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} = \\ &= -1 + x\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \\ &= -1 + 2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} + x^2 &= 0, \\ h(T,x) &= \ln x^2 \end{aligned}$$

PDE-tet.

Rendeljük hozzá a

$$dX(s) = X(s)\,ds + X(s)\,dw(s), \quad X(t) = x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Ez ismételten lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet, tehát a megoldása

$$X(s) = x\exp\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(s-t) + w(s-t)\right).$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása

$$h(t,x) = \mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right) + \int_t^T \mathbf{E}\left(X^2(s)\right)ds.$$

Az egyes komponenseket kiszámolva

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\ln X^2(T)\right) &= \mathbf{E}\left(\ln x^2 + 2\left[\frac{1}{2}(T-t) + w(T-t)\right]\right) = \\ &= \ln x^2 + \mathbf{E}\left(N\left((T-t), 2\sqrt{T-t}\right)\right) = \\ &= \ln x^2 + T - t, \end{aligned}$$

illetve a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\begin{aligned} \int_t^T \mathbf{E}\left(X^2(s)\right)ds &= x^2\int_t^T \mathbf{E}\left(\exp\left(s-t+2w(s-t)\right)\right)ds = \\ &= x^2\int_t^T \exp\left(3(s-t)\right)ds = \\ &= x^2\left[\exp\left(3(s-t)\right)\right]_t^T = \\ &= \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3(T-t)\right)-1\right). \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$h(t,x) = \ln x^2 + T - t + \frac{x^2}{3}\left(\exp\left(3(T-t)\right)-1\right).$$

Ha $t = T$, akkor

$$h(T, x) = \ln x^2,$$

vagyis teljesül a peremfeltétel. Az egyenletbe behelyettesítve

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + x\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x^2} + x^2 = \\
&-1 - x^2\exp\left(3\left(T-t\right)\right) + \\
&+2x\frac{1}{x} + \frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3\left(T-t\right)\right) - 1\right] + \\
&-\frac{2}{2}x^2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x^2}{3}\left[\exp\left(3\left(T-t\right)\right) - 1\right] + \\
&x^2,
\end{aligned}$$

amely az összevonásokat elvégezve nulla.