

Független növekményű folyamatok

Miért szépek a Lévy-folyamatok

Medvegyev Péter

2008

Definition

Az X sztochasztikus folyamat független növekményű, ha

- 1 $\mathbf{P}(X(0) = 0) = 1$,
- 2 a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük, és
- 3 minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ időpont sorozatra az

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

növekmények függetlenek. Ha a folyamathoz rendelt \mathcal{F} filtráció adott, akkor a folyamatot független növekményűnek mondjuk, ha minden t -re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az \mathcal{F}_t σ -algebrától.

Theorem

Ha a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett X sztochasztikus folyamat

- 1 *stacionárius,*
- 2 *a különböző időpontokhoz tartozó valószínűségi változók függetlenek,*
- 3 $\mathbf{E}(X(t)) = 0$ és $0 < \mathbf{D}(X(t)) < \infty,$

akkor az $X(t, \omega)$ kétváltozós függvény nem lehet mérhető.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X(t)) = 0$, $\mathbf{D}(X(t)) = 1$ és az X mint kétváltozós függvény mérhető. A Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\Omega} |X(t, \omega) X(s, \omega)| d\mathbf{P}(\omega) ds dt &\leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{D}(X(t)) \mathbf{D}(X(s)) ds dt = 1, \end{aligned}$$

így mérhetőségre tett feltétel miatt használható a Fubini-tétel.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left(\left(\int_0^1 X(t, \omega) dt \right)^2 \right) &= \mathbf{E} \left(\int_0^1 X(t, \omega) dt \int_0^1 X(t, \omega) dt \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^1 \int_0^1 X(t, \omega) X(s, \omega) ds dt \right) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}(X(t, \omega) X(s, \omega)) ds dt = 0\end{aligned}$$

ugyanis a függetlenség miatt, ha $s \neq t$ akkor

$$\mathbf{E}(X(t) X(s)) = \mathbf{E}(X(t)) \mathbf{E}(X(s)) = 0.$$

Ezért az $\int_0^1 X(t, \omega) dt$ változó majdnem minden ω -ra nulla.

A gondolatmenetet a $[0, 1]$ helyett tetszőleges I racionális végpontú intervallumra megismételve megmutatható, hogy létezik olyan N_1 nullmértékű halmaz, hogy ha $\omega \notin N_1$ akkor minden I racionális intervallumra $\int_I X(t, \omega) dt = 0$. A Fubini-tétel alapján

$$\mathbf{E} \left(\int_0^1 X^2 d\lambda \right) = \int_0^1 \mathbf{E} (X^2) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{D}^2 (X) d\lambda = 1,$$

ezért egy nullmértékű N_2 halmazon kívül minden ω -ra $\int_0^1 X(t, \omega)^2 dt < \infty$. Mivel véges mértékű halmazokon a négyzetes integrálhatóságból következik az integrálhatóság, ezért az $X(t, \omega)$ t szerint integrálható, következésképpen az $F(s) \stackrel{\circ}{=} \int_0^s X(t, \omega) dt$ integrálfüggvény folytonos, így ha az F a racionális végpontú intervallumokon nulla, akkor az F nulla.

Az intervallumok π rendszert alkotnak, így a monoton osztály tétel miatt az

$$v(B) \stackrel{\circ}{=} \int_B X(t, \omega) dt$$

mérték is nulla. Így ha $\omega \notin N_1 \cup N_2$, akkor majdnem minden t -re $X(t, \omega) = 0$, következésképpen

$$0 = \mathbf{E} \left(\int_0^1 X^2(t) dt \right) = \int_0^1 \mathbf{E} (X^2(t)) dt = \int_0^1 \mathbf{D}^2 (X(t)) dt = 1,$$

ami lehetetlen.

Example

Független növekményű folyamatnak lehetnek fix ugrásai.

Legyen ζ $1/2$ valószínűséggel ± 1 az

$$X(t) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 1 \\ \zeta & \text{ha } t \geq 1 \end{cases}$$

folyamat triviálisan független növekményű. Az X Fourier transzformáltja.

$$\varphi(t, u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t < 1 \\ \cos u & \text{ha } t \geq 1 \end{cases}$$

A példából látható, hogy a $\varphi(t, u)$ lehet nulla, de a nulla értéket ugrással éri el.

Megjegyezzük, hogy mivel minden független növekményű folyamat jobbról reguláris ezért egy független növekményű folyamat pontosan akkor folytonos a sztochasztikus konvergenciában, ha a folyamat bármely időpontban csak nulla valószínűséggel ugorhat. Ha valamely időpontban az ugrás valószínűsége pozitív, akkor azt szokás mondani, hogy a folyamatnak fix ugrása van az adott időpontban.

Sztocasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Theorem

Ha az X független növekményű folyamat sztocasztikus konvergenciában folytonos, akkor az

$$\varphi_t(u) \stackrel{\circ}{=} \varphi(t, u) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

soha sem lehet nulla.

Rögzítsük az u paramétert. Mivel az X valószínűségben folytonos, ezért a $\varphi(u, t)$ folytonos t -ben. Legyen

$$t_0(u) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t : \varphi(u, t) = 0\}.$$

Megmutatjuk, hogy $t_0(u) = \infty$. Definíció szerint $X(0) = 0$ így $\varphi(u, 0) = 1$, és mivel a $\varphi(u, t)$ a t szerint folytonos nyilvánvalóan $t_0(u) > 0$.

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Legyen

$$h(u, s, t) \doteq \mathbf{E}(\exp(iu(X(t) - X(s)))).$$

Az X független növekményű, így ha $s < t$, akkor

$$\varphi(u, t) = \varphi(u, s)h(u, s, t).$$

Az X jobbról való folytonossága miatt

$$\varphi(u, t_0(u)) = 0.$$

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Ha $t_0(u) < \infty$, akkor mivel az X rendelkezik bal oldali határértékkel a $\varphi(u, t_0(u)-)$ határérték értelmes. Megmutatjuk, hogy az érteke nem nulla. Az "exponenciális" egyenlőség miatt, ha $s < t_0(u) < \infty$, akkor

$$\varphi(u, t_0(u)-) = \varphi(u, s)h(u, s, t_0(u)-)$$

A $t_0(u)$ definíciója miatt $\varphi(u, s) \neq 0$ így ha $\varphi(u, t_0(u)-) = 0$, akkor $h(u, s, t_0(u)-) = 0$ minden $s < t_0(u)$ esetén..

Sztochasztikusan folytonos folyamatok Fourier-transzformáltjai

Ebből

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} h(u, s, t_0(u)-) = \\ &= \lim_{s \nearrow t_0(u)} \mathbf{E}(\exp(iuX(t_0(u)-) - iuX(s))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(0)) = 1, \end{aligned}$$

ami lehetetlen. Következésképpen

$$0 = \varphi(u, t_0(u)) = \varphi(u, t_0(u)-) \neq 0,$$

ami szintén lehetetlen, ugyanis a φ folytonos.

Definition

A továbbiakban $D(\mathbb{R}_+)$ jelöli az \mathbb{R}_+ időtengelyen értelmezett jobbról reguláris függvények terét. A mérhetőséget az $f \mapsto f(t)$ pont-funkcionálok által generált σ -algebrát értjük, vagyis azt a legszűkebb σ -algebrát, amelyre nézve az $f \mapsto f(t)$ funkcionálok mindegyike mérhető. Az így kapott σ -algebrát \mathcal{H} -val jelöljük.

Világos, hogy a \mathcal{H} σ -algebrát az

$$\{f \in D(\mathbb{R}_+) : f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_n) \in B_n\}$$

alakú halmazok generálják, ahol B_1, B_2, \dots, B_n Borel-mérhető halmazok.

Example

A $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} \sup_t |f(t)|$ mérhető a \mathcal{H} -ra nézve.

Mivel a suprémumot elegendő a racionális időpontokban venni, ezért

$$\{\Phi(f) \leq \lambda\} = \{f : |f(r)| \leq \lambda, r \in \mathbb{Q}\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} \{|f(r)| \leq \lambda\} \in \mathcal{H}.$$

Ha az X egy jobbról reguláris sztochasztikus folyamat, akkor az $X(t)$ minden t -re mérhető, ezért az $\omega \mapsto X(\omega)$ egy $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ mérhető leképezés, ugyanis az inverzhalmazok mérhetőségét elegendő a generáló σ -algebrára ellenőrizni. Így az $\omega \mapsto X(\omega) \mapsto \Phi(X(\omega))$ egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér felett.

Theorem

Legyen X független növekményű folyamat és tegyük fel, hogy az X a sztochasztikus konvergenciában folytonos. Ha Φ nem negatív \mathcal{H} -mérhető funkcionál a $D(\mathbb{R}_+)$ tér felett, akkor tetszőleges $\tau < \infty$ megállási időre

$$\mathbf{E}(\Phi(X^*) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*))|_{s=\tau}$$

ahol $X^(t) \doteq X(\tau + t) - X(\tau)$ és $X_s^*(t) \doteq X(s + t) - X(s)$.*

A megállási opciókról szóló tétel

Legyen $\varphi(u, t)$ az $X(t)$ Fourier-transzformáltja. Mivel az X a sztochasztikus konvergencia szerint folytonos a $\varphi(u, t) \neq 0$ és értelmes a

$$Z(u, t) \doteq \frac{\exp(iuX(t))}{\varphi(u, t)}$$

exponenciális martingál. Legyen τ korlátos megállási idő. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z(u, \tau + s) | \mathcal{F}_\tau) = Z(u, \tau).$$

Átosztás után

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z(u, \tau + s)}{Z(u, \tau)} \middle| \mathcal{F}_\tau\right) = 1,$$

vagyis

$$\mathbf{E}(\exp(iu(X(\tau + t) - X(\tau))) | \mathcal{F}_\tau) = \frac{\varphi(u, \tau + t)}{\varphi(u, \tau)}.$$

Az állítás teljesül a pontfunkcionálok exponenciális függvényére

A $\varphi(u, \tau + t)$ nyilván \mathcal{F}_τ -mérhető. Legyen $\Phi(f) \doteq \exp(iuf(t))$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Phi(X^*) | \mathcal{F}_\tau) &= \mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)) | \mathcal{F}_\tau) \doteq \\ &\doteq \mathbf{E}(\exp(iu(X(\tau + t) - X(\tau))) | \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \frac{\varphi(u, \tau + t)}{\varphi(u, \tau)} = \frac{\varphi(u, s + t)}{\varphi(u, s)} \Big|_{s=\tau} = \\ &= \frac{\varphi(u, s) \mathbf{E}(\exp(iu(X(t + s) - X(s))))}{\varphi(u, s)} \Big|_{\tau=s} = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iu(X_s^*(t)))) \Big|_{s=\tau} = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \Big|_{s=\tau}.\end{aligned}$$

Vagyis az állítás teljesül, ha $\Phi(f) \doteq \exp(iuf(t))$ funkcionálra.

Kiterjesztés tetszőleges megállási időre

Ha a τ nem korlátos, akkor a $\tau_n \doteq \tau \wedge n$ egy korlátos megállási idő. Ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor

$$A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}.$$

Ehhez ellenőrizni kell, hogy minden t -re

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ha $t > n$, akkor $\{\tau_n \leq t\} = \Omega$ és így a metszetben elhagyható

$$A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Ha $t \leq n$, akkor $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq t\}$ és

$$A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Kiterjesztés tetszőleges megállási időre

Ha $X_n^* \doteq X(\tau_n + t) - X(\tau_n)$ és $\Phi(f) \doteq \exp(iuf(t))$ akkor a már belátottak szerint

$$\int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \Phi(X_n^*) d\mathbf{P} = \int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) |_{s=\tau_n} d\mathbf{P}.$$

Mivel $\tau < \infty$, ezért minden ω -ra ha n elég nagy $\tau_n(\omega) = \tau(\omega)$, így

$$X(\tau_n + t) - X(\tau_n) \rightarrow X(\tau + t) - X(\tau).$$

A majorált konvergencia tétel szerint

$$\int_A \Phi(X^*) d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) |_{s=\tau} d\mathbf{P}.$$

Következésképpen, felhasználva, hogy a jobb oldali integrandus \mathcal{F}_τ -mérhető, elhagyhatjuk a korlátosságára vonatkozó feltételt.

A monoton osztály tétel miatt tetszőleges B Borel-mérhető halmaz esetén

$$\mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi_B(X_s^*(t)))|_{s=\tau}$$

vagyis az állítás a $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} \chi_B(f(t))$ esetén teljesül. Ebből átvihető lépcsős függvényekre, illetve tetszőleges h nem negatív Borel-mérhető esetén az állítás teljesül, ha $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} h(f(t))$. A szokásos módon több-dimenziós trigonometrikus polinómakat használva a monoton osztály tétellel kiterjeszthetjük az állítást minden korlátos véges sok ponttól függő funkcionálokra, majd korlátos \mathcal{H} -mérhető függvényre. Végezetül a monoton konvergencia tétellel az állítás átvihető minden \mathcal{H} -mérhető nem negatív funkcionálokra.

Több dimenziós polinómokra való áttérés

Legyen $a < b$ és tekintsük a $\Phi(f) \doteq \exp(iuf(a)) \exp(ivf(b))$ funkcionált. Világos, hogy az $\tilde{X}(t) \doteq X(t+a) - X(a)$ független növekményű az $\tilde{\mathcal{F}}_t \doteq \mathcal{F}_{t+a}$ filtrációra nézve.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Phi(X^*) | \mathcal{F}_\tau) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\Phi(X^*) | \mathcal{F}_{\tau+a}) | \mathcal{F}_\tau) \doteq \\ &\doteq \mathbf{E}(\mathbf{E}(\exp(iuX^*(a)) \exp(ivX^*(b)) | \mathcal{F}_{\tau+a}) | \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iuX^*(a)) \mathbf{E}(\exp(ivX^*(b)) | \mathcal{F}_{\tau+a}) | \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(i(u+v)X^*(a)) \mathbf{E}(\exp(iv(X(\tau+b) - X(\tau+a))) | \mathcal{F}_{\tau+a}) | \mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbf{E}(\exp(i(u+v)(X^*(a))) \mathbf{E}(\exp(ivX_s^*(b-a)) |_{s=\tau+a} | \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(ivX_s^*(b-a)) |_{s=\tau+a} \mathbf{E}(\exp(i(u+v)X^*(a)) | \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(ivX_s^*(b-a)) |_{s=\tau+a} \mathbf{E}(\exp(i(u+v)X_s^*(s)) |_{s=\tau} = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iv(X(s+b) - X(s+a))) \exp(i(u+v)X_s^*(a)) |_{s=\tau} = \\ &= \mathbf{E}(\exp(iv(X(s+b) - X(s))) \exp(iu(X(s+a) - X(s)))) |_{s=\tau}, \end{aligned}$$

vagyis a szorzatra is igaz. Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges szorzatra is igaz.

Lévy-folyamatok esete

Ha az X Lévy-folyamat és $\Phi(f) \stackrel{\circ}{=} \exp(iuf(t))$, akkor az $\mathbf{E}(\Phi(X_s^*))$ független az s -től amiből a teljes várható érték tétel felhasználásával

$$\mathbf{E}(\exp(iuX^*(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))),$$

így az $X^*(t)$ eloszlása azonos az $X(t)$ eloszlásával. A monoton osztály tételből azonnal következik, hogy ha valamely változó feltételes Fourier-transzformáltja determinisztikus, akkor a változó független a feltételtől: A

$$\mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \mathbf{E}(\exp(iuX^*(t)))$$

sorból

$$\mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi_B(X^*(t)))$$

amiből

$$\mathbf{P}(F \cap \{X^*(t) \in B\}) = \int_F \chi_B(X^*(t)) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(F) \mathbf{P}(X^*(t) \in B).$$

Theorem

Az előző állítás feltételeinek teljesülése esetén

$$\mathbf{E}(\Phi(X^*) \mid \tau = s) = \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)).$$

Megjegyezzük, hogy az $s \mapsto \mathbf{E}(\Phi(X_s^*))$ függvény Borel-mérhető. Ezt az $s \mapsto \mathbf{E}(\exp iu(X(s+t) - X(s)))$ esetén, felhasználva, hogy az X jobbról reguláris, könnyen indokolhatjuk, az általános eset pedig ismételten a monoton osztály tétel közvetlen folyománya. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Phi(X^*) \mid \sigma(\tau)) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\Phi(X^*) \mid \mathcal{F}_\tau \mid \sigma(\tau))) = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \mid_{s=\tau} \mid \sigma(\tau)) = \\ &= \mathbf{E}(\Phi(X_s^*)) \mid_{s=\tau},\end{aligned}$$

amiből a regressziós függvény definíciója miatt az egyenlőség evidens.

Theorem

Ha az X független növekményű folyamat és az X valószínűségben folytonos, és az X ugrásai nem nagyobbak egy fix c konstansnál, akkor az X momentumai minden véges időszak alatt egyenletesen korlátosak, vagyis ha $t < \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(|X^m(s)|) \leq k(m, t) < \infty, \quad s \in [0, t].$$

Rögzítsük a t időpontot. Az X jobbról reguláris, így minden trajektóriája minden véges szakaszon korlátos. Ebből következően

$$\sup_{s \leq 2t} |X(s)| < \infty.$$

Így ha b elegendően nagy, akkor

$$\mathbf{P} \left(\sup_{s \leq 2t} |X(s)| > \frac{b}{2} \right) \leq q < 1.$$

Vegyünk egy a számot és legyen

$$\tau \doteq \inf \{t : |X(s)| > a\} \wedge 2t.$$

A τ definíciója szerint

$$\{\tau < t\} \subseteq \left\{ \sup_{s \leq t} |X(s)| > a \right\} \subseteq \{\tau \leq t\}.$$

Ugyanakkor a

$$U \doteq \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\},$$

halmazon $\{\sup_{s < t} |X(s)| \leq a\}$ és $|X(t)| > a$, vagyis az X folyamatnak a t időpontban ugrása van, aminek a sztochasztikus folytonosság miatt a valószínűsége nulla.

Korlátos ugrások és a momentumok létezése

Mivel az ugrások nagysága korlátos, ezért az X bal oldali határértékének létezése és az $X(s-)$ balról való folytonossága miatt

$$\sup_{s \leq \tau} |X(s)| \leq \sup_{s \leq \tau} |X(s-)| + |\Delta X(\tau)| \leq a + c.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left\{ \sup_{s \leq t} |X(s)| > a + b + c \right\} \subseteq \\ & \subseteq \left\{ \sup_{s \leq t} |X(s)| > a, \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| > b \right\}. \end{aligned}$$

Ha $\sup_{s \leq t} |X(s)| > a + b + c$ akkor nyilván $\sup_{s \leq t} |X(s)| > a$ amiből persze $\tau \leq t$.

A $\tau \leq t$ felhasználásával

$$\sup_{\tau \leq s \leq t} |X(s)| \leq |X(\tau)| + \sup_{0 \leq u \leq t} |X(\tau + u) - X(\tau)|$$

amiből a $\sup_{s \leq \tau} |X(s)| \leq a + c$ miatt ha $\sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \leq b$ lenne

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq t} |X(s)| &= \sup_{s < \tau} |X(s)| \vee \sup_{\tau \leq s \leq t} |X(s)| \leq \\ &\leq \left(\sup_{s < \tau} |X(s)| \right) \vee \left(|X(\tau)| + \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \right) \leq \\ &\leq \sup_{s \leq \tau} |X(s)| + \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| \leq a + b + c, \end{aligned}$$

lenne, ami lehetetlen.

Ugyanakkor mivel

$$b < \sup_{s \leq t} |X(u+s) - X(u)| \leq \sup_{s \leq t} |X(u+s)| + \sup_{s \leq t} |X(u)| \leq 2 \sup_{s \leq 2t} |X(s)|$$

ezért

$$\left\{ \sup_{s \leq t} |X(u+s) - X(u)| > b \right\} \subseteq \left\{ \sup_{s \leq 2t} |X(s)| > \frac{b}{2} \right\}.$$

Jelölje F a τ eloszlásfüggvényét. Az erős Markov-tulajdonság és a regressziós függvény definíciója és a már belátottak alapján

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > a + b + c \right) \leq \\
 & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > a, \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| > b \right) \leq \\
 & \leq \mathbf{P} \left(\tau \leq t, \sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| > b \right) = \\
 & = \int_0^t \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(\tau + s) - X(\tau)| > b \mid \tau = u \right) dF(u) = \\
 & = \int_0^t \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(u + s) - X(u)| > b \right) dF(u) \leq \\
 & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq 2t} |X(s)| > \frac{b}{2} \right) \cdot \mathbf{P}(\tau \leq t) \leq \\
 & \leq q \cdot \mathbf{P}(\tau \leq t) = q \cdot \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > a \right).
 \end{aligned}$$

Ebből, ha

$$a \stackrel{\circ}{=} (n-1)(b+c),$$

akkor

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > n(b+c) \right) \leq \\ & \leq q \cdot \mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > (n-1)(b+c) \right) \leq \\ & \leq \dots \leq q^n. \end{aligned}$$

Az

$$\left\{ \sup_{s \leq t} |X(s)| > n(b+c) \right\} \setminus \left\{ \sup_{s \leq t} |X(s)| \geq (n+1)(b+c) \right\}$$

halmazon az integrál felülről becsülhető a

$$\mathbf{P} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)| > n(b+c) \right) \leq ((n+1)(b+c))^m$$

számmal, így

$$\mathbf{E} (|X(t)|^m) \leq \mathbf{E} \left(\sup_{s \leq t} |X(s)|^m \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n(b+c))^m q^{n-1} < \infty.$$

Theorem

Minden folytonos független növekményű folyamat Gauss-folyamat, vagyis tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n időpontok esetén az

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$$

eloszlása normális.

Az X független növekményű folyamat, ezért a $Z(t) \doteq X(t+s) - X(s)$ független növekményű folyamat minden s esetén. Ebből következően elegendő megmutatni, hogy az $X(t)$ normális eloszlású minden t -re.

Az X folytonossága miatt véges szakaszokon az X összes momentuma korlátos. Ebből következően egyrészt az $\mathbf{E}(X(t))$ minden t esetén véges, másrészt az X a véges időszakaszokon az $L^2(\Omega)$ térben korlátos, így minden véges szakaszon egyenletesen integrálható. Ebből következően a várható érték és a határérték felcserélhető, következésképpen az $\mathbf{E}(X(t))$ folytonos. Ebből következően az

$$Y(t) \doteq X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

folytonos martingál. Mivel az együttes eloszlás típusát a várható értékekkel való eltolás nem módosítja, ezért feltehetjük, hogy az X folytonos martingál.

Az X növekményei függetlenek, ezért az $[X]$ növekményei is függetlenek. Így az $U(t) \doteq [X](t) - \mathbf{E}([X](t))$ ismételtlen egy folytonos martingál. Az $[X]$ növekedő így az U véges változású, így majdnem minden kimenetelre $U \equiv 0$. Ebből következően az $[X]$ determinisztikus. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned} \exp(iuX(t)) - 1 &= iu \int_0^t \exp(iuX(s)) dX(s) - \\ &\quad - \frac{1}{2} u^2 \int_0^t \exp(iuX(s)) d[X](s). \end{aligned}$$

Az $\exp(iuX)$ korlátos az X a véges szakaszokon négyzetesen integrálható, így a sztochasztikus integrál martingál. Várható értéket véve

$$\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) - 1 = -\frac{1}{2}u^2 \mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuX(s)) d[X](s)\right).$$

Mivel a kvadratikus variáció determinisztikus, ezért a Fubini-tétel használható. A várható értéket és az integrálást felcserélve

$$\varphi(t, u) - 1 = \frac{1}{2}u^2 \int_0^t \varphi(s, u) d[X](s).$$

Könnyen, például az Itô-formulával megmutatható, hogy a

$$\varphi(t, u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2} [X](t)\right)$$

kielégíti az egyenletet. Meg kell mutatni, hogy a megoldás egyértelmű. Ha φ és ψ kielégíti az egyenletet és $\rho \stackrel{\circ}{=} \varphi - \psi$, akkor a ρ függvényre $\rho(0) = 0$ és

$$\rho = -\frac{u^2}{2} \int_0^t \rho(s) d[X](s) \stackrel{\circ}{=} -c \int_0^t \rho(s) d[X](s).$$

Ha valamely t időpontban $\rho(t) \neq 0$, akkor az ilyen időpontok halmazának van véges infimuma. Jelölje ezt az infimumot s . Világos, hogy $\rho(s) = 0$, ugyanis ha nem nulla, akkor az infimum csökkenthető lenne. Ha $s < \infty$, akkor az $[X]$ folytonossága miatt van olyan $t > s$, hogy.

$$[X](t) - [X](s) < \frac{1}{2c}.$$

Tetszőleges $w \in [s, t]$ időpontra

$$|\rho(w)| = |\rho(w) - \rho(s)| = \left| c \int_s^w \rho(u) d[X](u) \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{s \leq u \leq t} |\rho(u)|$$

ami lehetetlen.