Az Eszközárazás Első Alaptétele

ha nincsen arbitrázs

Kövi Dániel

Budapesti Corvinus Egyetem

Október 2008

Dalang–Morton–Willinger tétel

A tétel lényege:

Diszkrét véges időhorizonton az arbitrázs hiánya szükséges és elegendő feltétele egy ekvivalens martingál mérték létezésének.

Azaz: ha nincs arbitrázs, léteznek konzisztens árak.

Dalang–Morton–Willinger tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi tér, és $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ egy diszkrét idejű filtráció, $S \stackrel{\circ}{=} (S(t))_{t=0}^T$ pedig egy $\mathcal{F}$-mérhető m-dimenziós folyamat. Azaz $\forall$ t-re S_t $\mathcal{F}_t$-mérhető. $L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ egy altere legyen:

$$K \stackrel{\circ}{=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)] \cdot \theta(t) \right\}$$

ahol θ előrejelezhető stratégia, azaz $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. Így K a lehetséges árfolyamnyereségek halmaza.
Jelentse L^0_+ a nem negatív valváltozók halmazát, és

$$C \stackrel{\circ}{=} K - L^0_+.$$

Vezessük be C lezártját, $\mathrm{cl}(C)$. A lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő.
Ekkor a tétel legáltalánosabb alakja:

A tétel kimondása

Theorem (Dalang–Morton–Willinger)

A következő állítások ekvivalensek:

1. $C \cap L^0_+ = \{0\}$
2. $C \cap L^0_+ = \{0\}$ *és* $C = \mathrm{cl}(C)$
3. $\mathrm{cl}(C) \cap L^0_+ = \{0\}$
4. *Létezik olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínuségi mérték, amely* $\mathbf{P}$*-vel ekvivalens, a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym derivált véges és pozitív és amin az* S *m-dimenziós martingál.*

Kompaktság Véges Dimenziójú Tereken

Egy véges dimenziós halmaz zártságát kétféleképpen lehet belátni:

- Vesszük a halmaz ortonormál bázisát (ha van neki), és kiegészjtjük teljes bázissá (ami már az egész vektortér bázisa lesz). Az új vektorokra merőleges vektorok halmaza maga az altér. Vektorokra merőleges vektorok halmaza zárt halmaz a skaláris szorzat folytonossága miatt.
- Belátjuk, hogy a halmaz minden konvergens sorozatának határértéke is a halmazon belüli (azaz belátjuk a zártság definícióját).

Az első módszer már véges dimenziójú kúpoknál sem állja meg a helyét, csak alterekre alkalmazható.

Kompaktság Konvergens Sorozatokkal

Adott tetszőleges (y_n), halmazbeli konvergens sorozat, $y_n = Ax_n$. De (y_n) konvergenciája nem garantálja (x_n) konvergenciáját.
Indirekten: ha (x_n) nem korlátos, akkor osszunk le $\|x_n\|$-el, és így

$$\frac{y_n}{\|x_n\|} = A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$$

esetén már $(y_n / \|x_n\|) \longrightarrow 0$, és tegyük fel, hogy $A \neq \mathbf{0}$, ekkor az $(x_n / \|x_n\|)$ sorozat egységnyi normájú elemkből áll, így nem tarthat 0-hoz (tartson z-hez).

Ha A oszlopvektorai bázist alkotnak máris ellentmondásra jutottunk.

Ha A oszlopai nem alkotnak bázist, akkor a jobb oldal csak akkor tarthat 0-hoz, ha A elemei között lineárisan összefüggő is akad, azaz egyik a_i lineárisan kifejezhető a többi elem pozitív kombinációjaként. Így eliminálva sorra az összefüggő elemeket független oszlopvektorokhoz jutunk, ami megint ellentmondáshoz vezet. Azaz (x_n) korlátos

Véges Kúpok Kompaktsága

Véges kúpok esetén A oszlopvektorai a kúp tartói, a tér végessége miatt pedig ezek a tartók azonosak, és lehetnek lineárisan összefüggőek. A tartók nemnegatív kombinációja maga a kúp. A tartóelemekhez tartozó súlyok pedig x koordinátái.

Ha tekintjük az $(x_n - \alpha \cdot z)$ sorozatot (x_n nem negatív) és α-t addig növeljük, amíg az első pozitív koordináta ki nem ütődik (x_n *0-s koordinátáitól eltekinthetünk, a tartók azonossága miatt nem fog helyükre negatív súly kerülni az elimináláskor*), akkor az új sorozatnak, (x_n')-nek már legfeljebb csak $(m-1)$ pozitív koordinátája lesz (a legkisebbet kivettük, és persze ez az α minden n-re más).

Azért a legkisebb pozitív elemet elimináljuk, hogy kúp esetén A elemei, azaz a kúp tartóoszlopai mellé csak nemnegatív súlyok (x_n) kerüljenek.

Véges Kúpok Kompaktsága 2

Ezt a lépést addig kell ismételgetni (az új sorozatot megint a normájával elosztani, és új α-kat kreálni), amíg:

- A elemei lineárisan függetlenek lesznek
- A-nak 1 db eleme marad

Így mindenféleképpen ellentmondáshoz jutunk, mivel a jobboldal semmi féle képpen nem tarthat 0-hoz. Tehát (x_n) korlátos.

Az valószínűségi változók terének elemi tulajdonságai

- A valószínűségi változók a **P** mértéken *ekvivalencia-osztályok*ba sorolhatóak.

Az valószínűségi változók terének elemi tulajdonságai

- A valószínűségi változók a $\mathbf{P}$ mértéken *ekvivalencia-osztályok*ba sorolhatóak.
- Az L^0 téren a konvergencia a sztochasztikus konvergencia, ami metrizálható, sőt L^0 teljes metrikus tér. Így $Z \subseteq L^0$ halmaz zárt, ha $\forall$ Z-beli konvergens sorozat határértéke is Z-beli. Egy metrika: $d(X, Y) = \|X - Y\| = E(|X - Y| \wedge 1)$

Az valószínűségi változók terének elemi tulajdonságai

- A valószínűségi változók a **P** mértéken *ekvivalencia-osztályok*ba sorolhatóak.
- Az L^0 téren a konvergencia a sztochasztikus konvergencia, ami metrizálható, sőt L^0 teljes metrikus tér. Így $Z \subseteq L^0$ halmaz zárt, ha $\forall$ Z-beli konvergens sorozat határértéke is Z-beli. Egy metrika: $d(X, Y) = \|X - Y\| = E(|X - Y| \wedge 1)$
- Ám $\forall$ *sztochasztikusan konvergens* sorozatnak van *majdnem mindenhol konvergens* részsorozata ezért Z zárt, ha $\forall$ Z-beli *majdnem mindenhol konvergens* sorozat határértéke is Z-be esik.

Az valószínűségi változók terének elemi tulajdonságai

- A valószínűségi változók a **P** mértéken *ekvivalencia-osztályok*ba sorolhatóak.
- Az L^0 téren a konvergencia a sztochasztikus konvergencia, ami metrizálható, sőt L^0 teljes metrikus tér. Így $Z \subseteq L^0$ halmaz zárt, ha $\forall$ Z-beli konvergens sorozat határértéke is Z-beli. Egy metrika: $d(X, Y) = \|X - Y\| = E(|X - Y| \wedge 1)$
- Ám $\forall$ *sztochasztikusan konvergens* sorozatnak van *majdnem mindenhol konvergens* részsorozata ezért Z zárt, ha $\forall$ Z-beli *majdnem mindenhol konvergens* sorozat határértéke is Z-be esik.
- Így L^0 téren a zártságot szekvenciálisan a majdnem mindenholos technikával lehet belátni.

Kompaktság a valószínűségi változók terén

Lemma (Kompaktság az L^0-on)

Legyen (η_n) $\mathbb{R}^m$ értékű mérhető függvények sorozata és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre a $\left(\eta_{\sigma_k}\right)$ sorozat minden kimenetelre konvergens.

Bizonyítás:

A Bolzano–Weierstrass-tétel és a kimenetelenkénti korlátosság miatt $\forall\ \omega$ esetén $\exists\ (\sigma_k(\omega))$ sorozat, amelyre $\left(\eta_{\sigma_k}(\omega)\right)$ konvergens. A lényeg, hogy (σ_k) mérhetőnek választható. Legyen $\sigma_0 \mathrel{\hat{=}} 0$, és legyen

$$\sigma_k \mathrel{\hat{=}} \inf\left\{n > \sigma_{k-1} : |\eta_n - \eta_\infty| < \frac{1}{k}\right\}$$

Így biztosított, hogy (σ_k) minden k-ra mérhető, és $\eta_n \to \eta_\infty$, és $\eta_\infty = \lim_n \inf \eta_n$, ami a trajektóriánkénti korlátosság miatt létezik. Többdimenziós esetben először az első koordinátára kell elkészíteni ezt a sorozatot, majd a megritkított sorozaton a második koordináta szerint kell olyan részsorozatot keresni, ami konvergál, stb.

$\square$

Stricker Lemma

Lemma (Stricker)

Tetszőleges $\mathcal{A}$-ra mérhető f_i $(1 \leq i \leq m)$ függvények esetén, ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, akkor $L \circeq \left\{ f : f = \sum_{i=1}^{m} f_i \theta_i, \quad \theta_i \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \right\}$ *az $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-nak zárt altere.*

Bizonyítás:

L altér. Legyen $l_n \in L$ sorozat amely m.m. konvergál l_∞-hez. Be kell látni, hogy $l_\infty \in L$. Másképp jelölve:

$$\begin{aligned} l_n &\mathrel{\hat{=}} (g, y_n) \\ g &\mathrel{\hat{=}} (f_1, f_2, \ldots, f_m) \quad \text{és } y_n \mathrel{\hat{=}} \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right) \end{aligned}$$

Ám l_n konvergenciájából nem következik még y_n konvergenciája. De elég belátni, hogy az előző lemma miatt van konvergens részsorozata $y_{\sigma_k} \to y_\infty$. Ekkor y_∞ $\mathcal{F}$-mérhető és $(g, y_n) \to (g, y_\infty) = l_\infty$. Konvergens részsorozathoz elég, hogy az indexsorozat megválasztható úgy, hogy majdnem minden ω-ra pontonként korlátos.
Legyen Ω_1 az a halmaz, ahol nem korlátos. ekkor osszuk el az eredeti sorozatot $\|y_n(\omega)\|$-val:

$$\frac{l_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} = \left(g(\omega), \frac{y_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|}\right)$$

Ω_1-en $(y_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|)$ korlátos, tehát $\exists$ konvergens részsorozata, amire $(l_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|) \to 0$.
Azaz $\exists$ u_∞, amire $(g(\omega), u_\infty(\omega)) = 0$ $\forall$ $\omega \in \Omega_1$-re, azaz $\sum f_i(\omega)\varphi_i(\omega) = 0$, azaz a $g = (f_1, f_2, ..., f_m)$ vektor egyik koordinátája kifejezhető a többi által $\mathcal{F}$-mérhető súlyokkal.

Ω szűkítését megismételve többször az $l_n = \sum f_i \ \varphi_i^{(n)}$ szorzatösszegben ahol $\varphi_i^{(n)}(\omega)$ nem korlátos, ott $f_i(\omega) = 0$.
Tehát (y_n) korlátos, amiből következik, hogy L zárt.

$\square$

Ennek a lemmának a több-periódusú általánosítása a következő:

Kabanov-Stricker Lemma

Lemma (Kabanov-Stricker)

$(X(t))_{t=1}^{T}$ *egy tetszőleges adaptált m-dimenziós folyamat, és*

$$L \mathrel{\hat{=}} \left\{ f : f = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} X_i(t)\,\theta_i(t) \right\} = \left\{ f : f = \sum_{t=1}^{T} (X(t), \theta(t)) \right\}$$

ha $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ *előrejelezhető m-dimenziós folyamat, akkor* L *az* L^0*-nak egy zárt altere*

Kabanov-Stricker Lemma Proof

Bizonyítás:

Teljes indukcióval. $T = 1$-re az előző lemma miatt igaz. Tfh.: $T - 1$-ig igaz, ekkor

$$f_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{t=1}^{T} \left(X\left(t\right), \theta_n\left(t\right)\right) \longrightarrow f_\infty \ , \ b_n \stackrel{\circ}{=} \left(X\left(1\right), \theta_n\left(1\right)\right) \ , \ c_n \stackrel{\circ}{=} f_n - b_n$$

Ám (f_n) konvergenciájából nem következik (b_n) és (c_n) konvergenciája.
Ha $(\theta_n(1))$ korlátos, akkor létezik $(\theta_{\sigma_k}(1))$ konvergens részsorozat, és $(\theta_{\sigma_k}(t))_{t=2}^{T}$ előrejelezhető marad, mert a (σ_k) indexsorozat az első σ-algebrára mérhető.
Ha (b_n) konvergens, akkor (c_n) is, határértéke pedig:
$c_\infty = \sum_{t=2}^{T} \left(X\left(t\right), \theta_\infty\left(t\right)\right)$ és így a lemma igaz.
Ha $(\theta_n(1))$ nem korlátos, akkor Ω egy részhalmazára ...

Ha $(\theta_n(1))$ nem korlátos, akkor Ω egy részhalmazára

$$\frac{f_n}{\|\theta_n(1)\|} \doteq \left(X(1), \frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|}\right) + \sum_{t=2}^{T} \left(X(t), \frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|}\right)$$

esetén az összeg első tagja az előző lemmához hasonlóan konvergens, és mivel f_n is konvergens, így a második tag is az.
$(\theta_\infty(t) / \|\theta_\infty(t)\|)_{t=2}^{T}$-nál ha vesszük az **első** időpontot, ahol $\theta_\infty(t) \neq 0$ az előző lemmához hasonlóan itt is szűkíthető Ω, amin végül $(\theta_n(1))$ korlátos.

$\square$

No-Arbitrage Lemma

Lemma (No-Arbitrage)

Ha $L^0_+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *a nem negatív val.változók altere, és ha az előbbi* L *altérre igaz, hogy:*

$$L \cap L^0_+ (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = \{0\}$$

akkor a C *kúp, ami*

$$C \doteq L - L^0_+ (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$$

zárt lesz $L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$*-ban*

No-Arbitrage Proof

Bizonyítás:

Az előző lemma bizonyításával. $T = 1$-re , legyen $a_n \circeq l_n - r_n$, konvergens sorozat C-ben, ahol $l_n \in L$ és $r_n \geq 0$.
A probléma ismét az, hogy a_n konvergenciája nem biztosítja $l_n = (X, y_n)$ konvergenciáját, azaz y_n korlátossága nem garantált. $\|y_n\|$-el leosztva választható olyan részsorozat, amelyen l_n konvergens. Emiatt $(r_n / \|y_n\|)$-nak is konvergensnek kell lennie, és így határértékként kapjuk, hogy:

$$0 = (X, y_\infty) - r_\infty \quad \text{ahol } r_\infty \geq 0$$

A no-arbitrage feltétel miatt $r_\infty = 0$, és egy koordináta a korábbiakhoz hasonlóan könnyen eliminálható.
$T > 1$ esetére használva a fenti meggondolást:

$$X(1)\,\theta^*(1) + \sum_{t=2}^{T} X(t)\,\theta^*(t) - r^* = 0 \quad ahol \quad r^* = 0.$$

No-Arbitrage Proof 2

Ha egy $H \in \mathcal{F}_1$ halmazon $X(1)\,\theta_1^* > 0$ pozitív valószínűséggel, akkor a

$$X(1)\,\theta_1^* \chi_H = \sum_{t=2}^{T} X(t)\left(-\theta^*(t)\right)\chi_H$$

stratégia arbitrage-nak minősül, ezért $X(1)\,\theta_1^* = 0$ igaz lesz 1 valószínűséggel, ezzel csökkenthetjük a fentmaradó koordinátákat az első időpontban, a bizonyítás ezután meg már analóg a korábbiakkal.

$\square$

Kreps–Yan Szeparációs Tétel

Diszkrét időben a megvalósítható portfóliók halmaza:

$$K \circeq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1) \right] \theta(t) \right\}$$

Ezt a halmazt L^1-en kell elválasztani L^1_+-tól. Ám L^1-en L^1_+-nak nincsen belső pontja, így az elválasztás nem lehetséges egy egyszerű lineáris funkcionállal (Hahn–Banah tétel).

Kreps–Yan Lemma

Lemma (Kreps–Yan)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *egy tetszőleges valószínűségi tér. Legyen* C *egy zárt konvex kúpja* L^1*-nek, amire igaz, hogy:* $(-L^1_+) \subseteq C$ *és* $C \cap L^1_+ = \{0\}$*. Ekkor létezik* $\mathbf{Q}$ *valószínűségi mérték, amely ekvivalens* $\mathbf{P}$*-vel és*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \,,$$

és

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(c) \doteq \int_\Omega c \, d\mathbf{Q} = \int_\Omega c \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(c \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \leq 0, \quad \forall c \in C \,.$$

Bizonyítás:

L^1 duálisa L^∞, azaz minden L^1-beli lineáris függvény előáll integrál formában egy $z \in L^\infty$-beli elemmel:

$$\langle z, l \rangle = \int_\Omega z \cdot l \, d\mathbf{P}, \quad \forall l \in L^1$$

Legyen $\mathcal{Z} \triangleq \{z : \langle z, C \rangle \leq 0\}$, a $0 \in \mathcal{Z}$, így $\mathcal{Z} \neq \{\emptyset\}$, és C definíciója miatt $\forall z \geq 0$.
Jelölje $\mathcal{Y}$ $\mathcal{Z}$ elemeinek a tartóhalmazainak halmazát, azaz $\mathcal{Y} \triangleq \{Y \subseteq \Omega : \exists z \in \mathcal{Z} : Y = \{z > 0\}\}$. $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható unióra.
Ha $\lambda_0 = \sup \{\mathbf{P}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$, akkor $\exists \ (Y_n)$ sorozat, amire $\mathbf{P}(Y_n) \nearrow \lambda_0$. Legyen $Y_0 \triangleq \cup Y_n \in \mathcal{Y}$, így $\mathbf{P}(Y_0) = \lambda_0$.
Így elég lenne belátni, hogy $\lambda_0 = 1$, azaz $\exists \ z_0 \in \mathcal{Z} \subseteq L^\infty$ amire $\langle z_0, C \rangle \leq 0$ és $\mathbf{P}(z_0 > 0) = 1$, így ha $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \triangleq z_0$ akkor $\mathbf{Q}$ kielégíti a tétel feltételeit.

Kreps–Yan Proof 2

Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(Y_0) < 1$ és legyen $x \doteq \chi_{(Y_0)^c} \in L^1_+ \setminus \{0\}$. A $C \cap L^1_+ = \{0\}$ feltétel miatt $x \notin C$. A lemma feltevései miatt C egy konvex zárt halmaz, így a Hahn–Banach tétel értelmében $\exists\ z_x$ lineáris funkcionál, amely szigorúan szeparálja x-et C-től:

$$\langle z_x, x \rangle > \langle z_x, c \rangle, \quad \forall c \in C.$$

Viszont C kúp, így ha $\langle z_x, c \rangle > 0$ valamely $c \in C$-re, akkor $\langle z_x, \lambda \cdot c \rangle \nearrow \infty$ ha $\lambda \nearrow \infty$ ami ellentmondás a fentivel. Ezért $\langle z_x, c \rangle \leq 0$ de mivel $0 \in C$, így $\langle z_x, x \rangle > 0$, azaz:

$$\langle z_x, x \rangle = \int_\Omega z_x \cdot x \, d\mathbf{P} = \int_\Omega z_x \cdot \chi\left((Y_0)^c\right) \, d\mathbf{P} = \int_{(Y_0)^c} z_x \, d\mathbf{P} > 0$$

Kreps–Yan Proof 3

Tehát z_x pozitív lesz $(Y_0)^c$-en pozitív valószínűséggel. Mivel $(z_0 + z_x) \in \mathcal{Z}$, ezért $\langle z_0 + z_x, C\rangle = \langle z_0, C\rangle + \langle z_x, C\rangle \leq 0$, így $(z_0 + z_x)$ pozitívitási halmaza nagyobb mint Y_0-é, ami ellentmond annak, hogy Y_0 tartója a lehetséges tartók közül a legbővebb.

$\square$

1 $\Longrightarrow$ **2:** A No-Arbitrage lemma miatt C zárt.

2 $\Longrightarrow$ **3:** A 2. állításból a 3. triviális.

3 $\Longrightarrow$ **4:** Bármely η val.változóval meg lehet változatni $\mathbf{P}$ mértéket úgy, hogy η integrálható lesz az új mértéken:

$$\mathbf{P}'(A) \circeq c \int_A \exp\left(-\|\eta\|\right) d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{A}$$

$\mathbf{P}'$ ekvivalens $\mathbf{P}$-vel. Nem változnak a tétel feltevései, ha az eredeti mértéket ekvivalens módon változtatjuk meg.
Mivel az L^1-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $C_0 \circeq \mathrm{cl}(C) \cap L^1$ kúp zárt L^1-ben. A No-Arbitrage feltétel miatt pedig $C_0 \cap L^1_+ = \{0\}$.
A Kreps–Yan tétel miatt $\exists$ $\mathbf{Q}$ mérték, amelyre $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$ és $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(k) \leq 0$, $\forall k \in C_0$

A Dalang–Morton–Willinger Tétel Bizonyítása 2

Ezt $k \circeq \pm \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right)$-re használva ($\theta\left(t\right)$ $\mathcal{F}_{t-1}$ mérhető):

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right)\right) = 0.$$

Így $\forall F \in \mathcal{F}_{t-1}$-re ha $\theta\left(t\right) \circeq \chi_F$, akkor a feltételes várható érték definíciója miatt:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t\right) - S\left(t-1\right) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0,$$

Azaz S martingál **Q** szerint.

A Dalang–Morton–Willinger Tétel Bizonyítása 3

4 $\Longrightarrow$ **1:** Tegyük fel, hogy $\exists$ $\mathbf{Q}$, és S martingál $\mathbf{Q}$ alatt. Ha $h \in C \cap L^0_+$, akkor $\exists$ θ előrejelezhető folyamat, amire:

$$0 \leq h \leq \sum_{t=1}^{T} \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right) \right] \theta\left(t\right).$$

Ekkor csak be kell látni, hogy:

$$0 \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \left[S\left(t\right) - S\left(t-1\right) \right] \theta\left(t\right) \right) = 0$$

azaz h majdnem mindenütt 0 $\mathbf{Q}$ alatt, de mivel $\mathbf{Q}$ ekvivalens $\mathbf{P}$-vel, h majdnem mindenütt 0 $\mathbf{P}$ alatt, azaz $C \cap L^0_+ = \{0\}$.
Mivel θ nem feltétlenül korlátos, ezért a mérhető részt nem biztos, hogy ki lehet emelni a várható értékből, sőt $[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)$ sem biztos, hogy integrálható.
Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra: szorozzuk be a $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\Sigma\,[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right)$ -t $\chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)$-el. $\theta(1)\,\chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)$ korlátos és $\mathcal{F}_0$ mérhető $\forall n$-re, így a stratégia előrejelezhető. Mivel S martingál $\mathbf{Q}$ alatt:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left([S(1) - S(0)]\,\chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)\,\theta(1)\right) =$$

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left([S(1) - S(0)]\,\chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)\,\theta(1) \mid \mathcal{F}_0\right)\right) =$$

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(1) - S(0) \mid \mathcal{F}_0\right)\right]\chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)\,\theta(1)\right) =$$

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(0 \cdot \chi(\|\theta(1)\| \leq n_1)\,\theta(1)\right) = 0.$$

A Dalang–Morton–Willinger Tétel Bizonyítása 5

Az integrál additívitását felhasználva:

$$\begin{gathered}0 \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\chi\left(\|\theta(1)\| \leq n_1\right)\right) \leq \\ \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S(1) - S(0)\right]\chi\left(\|\theta(1)\| \leq n_1\right)\theta(1)\right) + \\ + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S(t) - S(t-1)\right]\chi\left(\|\theta(1)\| \leq n_1\right)\theta(t)\right)\end{gathered}$$

ahol az első várható érték 0.

Az előző egyenletet $\chi\left(\|\theta\left(2\right)\| \leq n_2\right)$-vel megszorozva, a dominált konvergencia tétel miatt:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\prod_{t=1}^{2}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\| \leq n_t\right)\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left[S\left(1\right)-S\left(0\right)\right]\theta\left(1\right)\prod_{t=1}^{2}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\| \leq n_t\right)\right)+$$

$$+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right)\prod_{t=1}^{2}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\| \leq n_t\right)\right) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left[S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right)\prod_{t=1}^{2}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\| \leq n_t\right)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T}\left[S\left(t\right)-S\left(t-1\right)\right]\theta\left(t\right)\prod_{t=1}^{2}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\| \leq n_t\right)\right).$$

A Dalang–Morton–Willinger Tétel Bizonyítása 7

Ezt T-ig ismételve:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\left\|\theta\left(t\right)\right\|\leq n_t\right)\right)\leq\varepsilon.$$

Így a monoton konvergencia tétel miatt $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\right)\leq\varepsilon$, azaz $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\right)=0$.

$\square$

Comment

A martingálmérték létezését C zártsága nélkül is be lehet látni.

$T = 1$-re a Stricker lemma miatt igaz.
Az indukciós feltevés miatt létezik martingál mérték a $t \in [0,1]$ és a $t \in [1, T]$ időszakokra ($\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$).
Így a Kreps–Yan tételt $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{Q}_2)$-re alkalmazva: $d\mathbf{Q}_1 / d\mathbf{Q}_2$ korlátos (L^∞-beli), legyen:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \stackrel{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}}.$$

azaz

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2.$$

$d\mathbf{Q} / d\mathbf{P}$ pozitív és korlátos, így elég belátni, hogy az így generált $\mathbf{Q}$ martingál mérték $t \in [0, T]$-n.

Comment 2

Először belátjuk, hogy $S(t)$ integrálható $\mathbf{Q}$-ra nézve ha $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S(0)\, d\mathbf{Q} &\doteq \int_\Omega S(0) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \doteq \\
&\doteq \int_\Omega S(0) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_\Omega S(0) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_\Omega S(0)\, d\mathbf{Q}_1 < \infty,
\end{aligned}$$

így mivel $\mathbf{Q}_1$ martingál mérték $t \in [0, 1]$-re, ezért $\mathbf{Q}$ is az. $t > 1$ -re pedig:

$$\int_\Omega S(t)\, d\mathbf{Q} = \int_\Omega S(0) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 < \infty$$

mivel $S(t)$ integrálható $\mathbf{Q}_2$-re nézve, és a $d\mathbf{Q}_1 / d\mathbf{Q}_2$ korlátos.

Comment 3

Tetszőleges $F \in \mathcal{F}_0$-ra, $\mathbf{Q}_1$ martingál mérték voltát kihasználva $t = 0$ vagy 1-re:

$$\begin{aligned}
\int_F S(1)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(1) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \int_F \left(S(1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \right) \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_F S(1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(1)\, d\mathbf{Q}_1 = \int_F S(0)\, d\mathbf{Q}_1 = \\
&= \int_F S(0) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(0) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\
&= \int_F S(0)\, d\mathbf{Q},
\end{aligned}$$

így:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(1) \mid \mathcal{F}_0\right) = S(0).$$

Comment 4

$t \geq 1$-re $d\mathbf{Q}_1 / d\mathbf{Q}_2$ korlátossága és $\mathcal{F}_1$-mérhetősége miatt $\mathcal{F}_t$-mérhető is, így $\forall\ F \in \mathcal{F}_t$-re:

$$
\begin{aligned}
\int_F S(t+1)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(t+1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_2} \left(S(t+1) \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mid \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_2} \left(S(t+1) \mid \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}_2 = \\
&= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} S(t)\, d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(t)\, d\mathbf{Q},
\end{aligned}
$$

azaz $(S(t))_{t=0}^{T}$ martingál $\mathbf{Q}$-n.