Sztochasztikus folyamatok

Martingálok és a megállási opciókról szóló tétele

Medvegyev Péter

2008

A feltételes várható érték definíciója

Definition

Ha ξ tetszőleges valószínűségi változó és $\mathcal{F}$ egy tetszőleges σ-algebra, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ valószínűségi változót a ξ $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes várható értékének mondjuk, ha

1. az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ mérhető az $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve,
2. minden $F \in \mathcal{F}$ esetén érvényes a következő egyenlőség:

$$\int_F \xi d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})\, d\mathbf{P}.$$

Akárcsak a ξ az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ is valószínűségi változó, így csak majdnem mindenhol értelemben definiált. A ξ-nek integrálhatónak kell lenni, bár nem kell az integrálnak végesnek lenni.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ-nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ-nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ-nek és az η-nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ-nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right)$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ-nek és az η-nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ξ mérhető az $\mathcal{F}$-re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) = \xi$.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ-nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ-nek és az η-nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ξ mérhető az $\mathcal{F}$-re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi$.
4. Érvényes a kiemelési szabály, ha az η korlátos és $\mathcal{F}$-mérhető, és az ξ-nek létezik véges feltételes várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}(\eta\xi \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

Az egyenlőség akkor is teljesül, ha ξ és η nem negatív.

A feltételes várható érték tulajdonságai

1. Ha $\xi \geq 0$, vagy a ξ-nek létezik véges várható értéke, akkor az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ jól definiált. Az első esetben az értéke lehet $+\infty$ a második esetben az értéke véges.
2. A feltételes várható érték additív, vagyis ha a ξ-nek és az η-nak létezik véges feltétles várható értéke, akkor az összegnek is van, és az összeg feltétles várható értéke a feltételes várható értékek összege. Az additivitás akkor is értelmes, ha a két változó nem negatív.
3. Ha a ξ mérhető az $\mathcal{F}$-re és a feltételes várható érték létezik, akkor $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi$.
4. Érvényes a kiemelési szabály, ha az η korlátos és $\mathcal{F}$-mérhető, és az ξ-nek létezik véges feltételes várható értéke, akkor

   $$\mathbf{E}(\eta\xi \mid \mathcal{F}) = \eta\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}).$$

   Az egyenlőség akkor is teljesül, ha ξ és η nem negatív.
5. Ha ξ független az $\mathcal{F}$-től, akkor $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(\xi)$.

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right).$$

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right).$$

2. Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ akkor

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right).$$

A torony szabály

1. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, akkor
$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right).$$
2. Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ akkor
$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right).$$
3. Speciálisan ha $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor
$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi\right).$$

   Ezt szokás a teljes várható érték tételnek is mondani.

A feltételes várható érték és a konvergencia

1. Ha $|\xi_n| \leq \eta$ és η-nak van véges várható értéke és $\xi_n \to \xi$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right)$$

speciálisan a feltételes várható érték folytonos az L^1-ben.

A feltételes várható érték és a konvergencia

1. Ha $|\xi_n| \leq \eta$ és η-nak van véges várható értéke és $\xi_n \to \xi$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right)$$

   speciálisan a feltételes várható érték folytonos az L^1-ben.

2. Ha $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \ldots$ akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}\right).$$

Martingálok definíciója

Definition

Egy X adaptált folyamat definíció szerint logikai martingál, ha az $X(t)$ minden t időpontra integrálható, és tetszőleges $s < t$ időpontok esetén teljesül az

$$\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s)$$

Definition

Folytonos időhorizonton egy logikai martingált csak akkor tekintünk martingálnak, ha a trajektóriái jobbról regulárisak.

Definition

Az X és az Y folyamatok módosítás erejéig egybeesnek, ha minden t-re $X(t) \overset{m.m.}{=} Y(t)$ vagy ami ugyan az minden t-re az $X(t)$ és az $Y(t)$ ugyanazt a valószínűségi változót reprezentálja.

Theorem

Ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor minden logikai martingálhoz van olyan martingál, amely értékei minden t időpontban majdnem mindenhol megegyeznek a logikai martingál értékeivel. Ezt úgy is ki szokás fejezni, hogy a szokásos feltételek teljesülése esetén a logikai martingálok regularizálhatóak.

Martingálok és filtráció

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és ξ tetszőleges integrálható valószínűségi változó, akkor van olyan X martingál, hogy tetszőleges t-re

$$X(t) \overset{m.m}{=} \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

Mivel teljesülnek a szokásos feltételek elegendő belátni, hogy a $t \mapsto \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ logikai martingál. A torony szabály miatt minden $t > s$ esetén

$$\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} X(s).$$

Vagyis az így kapott változók logikai martingált alkotnak. A szokásos feltételek miatt az idézett tétel alapján a folyamatnak van reguláris verziója, amely már definíció szerint martingált alkot.

Független és stacionárius növekmény

Definition

Az X sztochasztikus folyamat

1. független növekményű, ha minden $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpont sorozatra az

   $$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_k) - X(t_{k-1}), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

   növekmények függetlenek,
2. stacionárius növekményű, ha $t > s$ esetén az $X(t) - X(s)$ eloszlása megegyezik az $X(t-s) - X(0)$ eloszlásával.
3. Ha a folyamathoz rendelt $\mathcal{F}$ filtráció adott, akkor a folyamatot független növekményűnek mondjuk, ha minden t-re és $h > 0$ számra az $X(t+h) - X(t)$ növekmény független az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrától.

Lévy-folyamat

Definition

A X folyamat Lévy-folyamat, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Független növekményű folyamatok és martingálok

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X független növekményű folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható értéke, akkor az

$$Y(t) \overset{\circ}{=} X(t) - \mathbf{E}(X(t))$$

kompenzált folyamat martingál.

Ha $t > s$, akkor

$$\mathbf{E}(Y(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Y(t) - Y(s) + Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=}$$
$$\overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=}$$
$$\overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(Y(t) - Y(s)) + \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Y(s)|\mathcal{F}_s) \overset{m.m.}{=} Y(s)$$

A szokásos feltételek miatt az Y regularizálható. Minden független növekményű folyamat jobbról reguláris, ezért az $\mathbf{E}(X(t))$ függvény szükségszerűen jobbról reguláris, így az Y folyamat is jobbról reguláris.

Example

Ha teljesülnek a szokásos feltételek és X egy Lévy-folyamat és minden időpontban létezik a folyamat várható érték, akkor az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} X(t) - t \cdot \mathbf{E}(X(1))$$

kompenzált folyamat martingál.

A Lévy-folyamatok stacionárius és független növekményű folyamatok.Be kell látni, hogy $\mathbf{E}(X(t)) = t \cdot \mathbf{E}(X(1))$. A stacionárius növekedés feltétele miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X(na)) &= \mathbf{E}(X(na) - X((n-1)a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \\ &= \mathbf{E}(X(a)) + \mathbf{E}(X((n-1)a)) = \cdots = n\mathbf{E}(X(a)). \end{aligned}$$

Lévy folyamatok várható értéke

Ebből

$$n\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(1\right)\right),$$

így ha $t = p/q$, akkor

$$\mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(X\left(\frac{p}{q}\right)\right) = p\mathbf{E}\left(X\left(\frac{1}{q}\right)\right) = \frac{p}{q}\mathbf{E}\left(X\left(1\right)\right).$$

A szokásos feltételek teljesülnek, így az előző példa miatt $\mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right)$ jobbról reguláris, ezért minden t-re $\mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right) = t \cdot \mathbf{E}\left(X\left(1\right)\right)$.

Lévy folyamatok várható értéke

Lévy-folyamatok esetén elég feltenni, hogy az $X(1)$-nek létezik várható értéke, ebből már következik, hogy minden $0 < t < 1$ esetén is létezik a várható érték.amiből már következik, hogy minden t-re létezik a várható érték. Valóban: független valószínűségi változók esetén az $\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}(\xi) + \mathbf{E}(\eta)$ egyenlőséghez elegendő, ha a $(\xi + \eta)$-nak létezik véges várható értéke. A függetlenség miatt

$$\mathbf{E}(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x + ydF(x)\, G(y).$$

Fubini tétel miatt a kettős integál pontosan akkor véges, ha a belső integrál is majdnem minden y esetén véges, vagyis a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x + ydF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) + y$$

véges, vagyis véges az $\mathbf{E}(\xi)$. (Független növekményű folyamat esetén csak azt tudjuk, hogy ha egy t_0-ban van várható érték, akkor a $0 \leq t \leq t_0$ is van. De nem tudjuk, hogy utána van-e. Például X legyen nulla egy pozitív szakaszon, utána, meg a Cauchy-folyamat.)

Lévy folyamatok várható értéke

Meg lehet mutatni, hogy ha X egy Lévy-folyamat és $\mathcal{F}^0$ a generált filtráció és $\mathcal{F}$ a nullmértékű halmazokkal kiegészített kiterjesztett filtráció, akkor az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, így a gondolatmenet használható. Ha ezt nem akarjuk felhasználni, akkor az alább belátott $\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u)\varphi_s(u)$ azonosságot u szerint deriválva

$$\varphi'_{t+s}(u) = \varphi'_t(u)\varphi_s(u) + \varphi(u)\varphi'_s(u).$$

Ha $u = 0$, akkor

$$i\mathbf{E}(X(t+s)) = i(\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X(s))).$$

Ebből azonban nem következik, hogy az $\mathbf{E}(X(t))$ lineáris, ugyanis az $u(x+y) = u(x) + u(y)$ Cauchy-egyenletnek vannak nem mérhető megoldásai. De mivel az

$$\varphi_t'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_t(h) - 1}{h}$$

függvény a t szerint mérhető, ugyanis folytonos függvények határértéke, belátjuk, hogy a lineáris függvény az egyetlen megoldás.

Cauchy-egyenlet

Elég megmutatni, hogy ha az $u(x+y)=u(x)+u(y)$ egyenlet egy u megoldása egy a pontban folytonos, ugyanis akkor mindenhol folytonos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0} u(x) &= \lim_{x\longrightarrow x_0} u(x)+0= \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0} u(x)+\lim_{x\longrightarrow x_0} u(x_0-x+a)-u(a)= \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0} \left(u(x)+u(x_0-x+a)\right)-u(a)= \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0} u(x_0+a)-u(a)=u(x_0+a)-u(a) \\
&= u(x_0).
\end{aligned}$$

Cauchy-egyenlet

Az additivitás miatt

$$u(0) = u(0+0) = u(0) + u(0) = 2u(0)$$

vagyis $u(0) = 0$.
Legyen $0 = u(0) \in U$ nyílt és $V - V \subset U$ szintén nyílt. $\mathbb{R} = \cup_n (r_n + V)$ ezért a $\mathbb{R} = \cup_n u^{-1}(r_n + V)$. Mivel az u mérhető, ezért az $u^{-1}(r_n + V)$ halmazok mérhetőek. Az egyenlőség csak úgy lehetséges, ha legalább egy $W \overset{\circ}{=} u^{-1}(V + r_n)$ Lebesgue-mértéke pozitív. .Ha $x, y \in W \overset{\circ}{=} u^{-1}(r_n + V)$, akkor

$$\begin{aligned} u(x) &= r_n + v_x, u(y) = r_n + v_y, \\ u(x-y) &= u(x) - u(y) = v_x - v_y \in V - V \end{aligned}$$

így $x - y \in u^{-1}(V - V)$, vagyis $W - W \subset u^{-1}(V - V)$

Steinhaus-tétele

De Steinhaus-tétele miatt a

$$0 \in W - W \subset u^{-1}(V - V) \subset u^{-1}(U)$$

tartalmaz egy nulla környezetet. vagyis az u a nulla pontban folytonos.

Theorem (Steinhaus)

Ha W Lebesgue-mértéke pozitív, akkor $W - W$ tartalmaz egy környezetét a nulla pontnak.

Steinhaus-tétele

A belső regularitás miatt van $K \subset W$ kompakt, amely pozitív mértékű. A W tehát lehet kompakt. A külső regularitás miatt legyen U olyan, hogy $W \subset U$, az U nyílt és $\lambda(U) < 2\lambda(W) > 0$. Mivel a W kompakt, ezért az U^c-től való távolsága pozitív, így van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $B(0,\varepsilon) + W \subset U$. De ekkor minden $y \in B(0,\varepsilon)$ esetén $y + W \cap W \neq \emptyset$ ugyanis ellenkező esetben, felhasználva, hogy a λ eltolásinvariáns

$$\lambda(U) \geq \lambda((y+W) \cup W) = \lambda(W) + \lambda(y+W) = 2\lambda(W).$$

Így $y \in W - W$, vagyis $B(0,\varepsilon) \subset W - W$.

Fourier transzformáció

Definition

Legyen ξ valószínűségi változó. A

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \circeq \mathbf{E}(\exp(it\xi)) = \mathbf{E}(\cos t\xi) + i\mathbf{E}(\sin t\xi)$$

függvényt a ξ Fourier-transzformáltjának nevezzük. Ha a ξ eloszlásfüggvénye F, akkor

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos txdF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin txdF(x).$$

Ha a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ vektor változó, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{t}) &= \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) \circeq \\ &\circeq \mathbf{E}(\exp(i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \ldots + t_m\xi_m))) = \mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi}))). \end{aligned}$$

Poisson eloszlás

Example

A λ paraméterű Poisson-eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

Valóban

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \exp(itk) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\exp(it))^k = \\ &= \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).\end{aligned}$$

Normális eloszlás

Example

Az $N(0,1)$ standard normális eloszlás Fourier-transzformáltja

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)(\cos tx + i \sin tx)\,dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cos tx dx\end{aligned}$$

A bederiválós trükk

A t szerinti deriváltva, majd a deriváltat parciálisan integrálva x szerint

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x \sin tx dx = \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sin tx\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) t \cos tx dx = \\
&= -t\varphi(t).
\end{aligned}$$

$\varphi(0) = 1$, ezért teljesül a

$$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi(t), \quad \varphi(0) = 1$$

egyenlet. Közvetlen behelyettesítéssel látható, hogy a $\varphi(t) = \exp\left(-t^2/2\right)$.

Unicitási tétel

Theorem

Ha a $\boldsymbol{\xi}_1$ és a $\boldsymbol{\xi}_2$ vektorok Fourier-transzformáltjai megegyeznek, akkor az eloszlásaik is megegyeznek.

Jelölje $\mathcal{L}$ az olyan u korlátos mérhető függvények halmazát, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)) = \mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_2)).$$

Az $\mathcal{L}$ triviálisan λ-rendszer, amely tartalmazza, az $\exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x}))$ alakú trigonometrikus függvények π-rendszerét. A monoton osztály tétel miatt az $\mathcal{L}$ tartalmazza a trigonometrikus polinomok által generált σ-algebra elemeinek karakterisztikus függvényeit. Ez utóbbi σ-algebra megegyezik a folytonos függvények által generált σ-algebrával, vagyis a Borel-halmazokkal. Ebből következően tetszőleges B Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B) = \mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)) = \mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_2)) = \mathbf{P}(\xi_2 \in B),$$

vagyis a két eloszlás valóban megegyezik.

Laplace transzformált

Definition

Az

$$L(s) = \mathbf{E}(\exp(-s\xi))$$

kifejezést az ξ Laplace-transzformáltjának mondjuk. A valószínűségszámításban inkább az

$$M(s) = \mathbf{E}(\exp(s\xi))$$

úgynevezett momentumgeneráló függvényt szokás használni.

Mindkét fogalom hátránya, hogy csak az értelmezési tartományuk nem feltétlenül az egész számegyenes. A Laplace-transzformált jól használható, ha $\xi \geq 0$.

Theorem

Ha $\xi \geq 0$, akkor az L egyértelműen meghatározza a ξ eloszlását.

A normális eloszlás Laplace-transzformáltja

Example

Ha a ξ eloszlása $N(0,1)$, akkor a Laplace-transzformáltja $\exp\left(s^2/2\right)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\exp\left(-s\xi\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\exp\left(-sx\right)dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\left(x+s\right)^2}{2}\right)dx = \\
&= \exp\left(\frac{s^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Függetlenség

1. Ha A és B két esemény, akkor az A és a B független, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.
2. Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két σ-algebra, akkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ függetlenek, ha minden $A \in \mathcal{A}$ és minden $B \in \mathcal{B}$ esetén az A és a B függetlenek.
3. Ha ξ és η két valószínűségi változó, akkor a ξ és az η függetlenek, ha a generált σ-algebrák függetlenek, vagyis minden C és D Borel-mérhető halmaz esetén
$$\mathbf{P}(\xi \in C, \eta \in D) = \mathbf{P}(\xi \in C)\,\mathbf{P}(\eta \in D).$$
4. A definíciók értelemszerűen átvihetők véges részhalmazokra, ahol hangsúlyozni kell, hogy minden részhalmazra is teljesülni kell a szorzatrabonthatóság feltételének.
5. Tetszőleges számosságú halmazok vagy változók esetén az összes véges részhalmaz függtlenségét követeljük meg.

Függetlenség és eloszlásfüggvény

Theorem

A $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha $F = F_1 \cdot F_2$, ahol F_1 a $\boldsymbol{\xi}_1$ és F_2 a $\boldsymbol{\xi}_2$ eloszlásfüggvénye, és F a $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ közös eloszlásfüggvénye.

Ha a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, akkor a felbontás teljesül. Rögzítsünk egy y számot és legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)\chi\{\xi_2 < y\}) = \mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_2 < y).$$

Az $\mathcal{L}$ λ-rendszer. A feltétel szerint az $\mathcal{L}$ tartalmazza az $u(x) = \chi(-\infty, x)$ függvények π-rendszerét. Így tartalmazza ezen π-rendszer által generált σ-algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden C Borel-mérhető halmazra

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in C, \xi_2 < y) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in C)\mathbf{P}(\xi_2 < y).$$

A gondolatmenetet rögzített C-vel megismételve éppen az állítást kapjuk.

Theorem

A $\boldsymbol{\xi}_1$ és $\boldsymbol{\xi}_2$ valószínűségi vektorok pontosan akkor függetlenek, ha $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, ahol φ_1 a $\boldsymbol{\xi}_1$ és φ_2 a $\boldsymbol{\xi}_2$ Fourier-transzformáltja, és φ a $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ közös eloszlásának Fourier-transzformáltja.

Ha a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, akkor a felbontás teljesül. Rögzítsünk egy $\mathbf{v}$ vektort és legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos mérhető u függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)\exp(i(v, \boldsymbol{\xi}_2))) = \mathbf{E}(u(\boldsymbol{\xi}_1)) \cdot \mathbf{E}(\exp(i(v, \boldsymbol{\xi}_2))).$$

Az $\mathcal{L}$ λ-rendszer. A feltétel szerint az $\mathcal{L}$ tartalmazza az $u(\mathbf{x}) = \exp(i(\mathbf{u}, \mathbf{x}))$ függvények π-rendszerét. Így tartalmazza ezen π-rendszer által generált σ-algebra szerint mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit. Így minden B Borel-mérhető halmazra

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\chi_B(\boldsymbol{\xi}_1)\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))) &= \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1))\mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))) = \\ &= \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_1 \in B)\mathbf{E}(\exp(i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_2))).\end{aligned}$$

Megfordítva

Most legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos és mérhető v függvények halmaza, amelyekre

$$\mathbf{E}\left(\chi_B(\xi_1)\mathbf{v}\left(\xi_2\right)\right) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)\mathbf{E}(\mathbf{v}\left(\xi_2\right)).$$

Ismét a monoton osztály tétel miatt

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B, \xi_2 \in D) = \mathbf{E}(\chi_B(\xi_1)\chi_D(\xi_2)) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B)\mathbf{P}(\xi_2 \in D).$$

A bizonyításban hallgatólagosan kihasználtuk, hogy a trigonometrikus polinomok által generált σ-algebra azonos a folytonos függvények által generált σ-algebrával.

Exponenciális martingál

Legyen X Lévy-folyamat. Tetszőleges t-re definiálhatjuk a

$$\varphi_t(u)) \overset{\circ}{=} \varphi(u,t) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t)))$$

Fourier-transzformáltakból álló folyamatot. Mivel a Lévy-folyamatok definíció szerint jobbról regulárisak a majorált konvergencia tétele miatt a $\varphi_t(u)$ minden u-ra jobbról reguláris. A független és a stacionárius növekmény feltételét kihasználva

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+s}(u) &\overset{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(iuX(t+s))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s)-X(t)))\exp(iuX(t))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iu(X(t+s)-X(t))))\cdot\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) = \\
&= \mathbf{E}(\exp(iuX(s)))\cdot\mathbf{E}(\exp(iuX(t))) \overset{\circ}{=} \varphi_t(u)\cdot\varphi_s(u).
\end{aligned}$$

Lévy-folyamatok nulla valószínűséggel ugranak

A jobbról folytonosság és a stacionaritás érdekes következménye, hogy

$$\mathbf{E}(\exp(iu(X(t)-X(t-)))) =$$
$$\mathbf{E}(\lim_{h\searrow 0}\exp(iu(X(t)-X(t-h)))) =$$
$$\lim_{h\searrow 0}\mathbf{E}(\exp(iu(X(t)-X(t-h)))) =$$
$$= \lim_{h\searrow 0}\varphi_h(u) = \varphi_0(u) = 1.$$

A Fourier-transzformáció egyértelműen jellemzi az eloszlást, következésképpen $X(t-) \overset{m.m.}{=} X(t)$. Másképpen fogalmazva Lévy-folyamatok esetén tetszőleges t-re az ugrás valószínűsége nulla.

Folytonosság

Következésképpen

$$\left|\varphi_{t+s}(u)\right| = |\varphi_t(u)| \cdot |\varphi_s(u)|.$$

Mivel $|\varphi_t(u)| \leq 1$ és $|\varphi_0(u)| = 1$ a Cauchy-féle függvényegyenletből $|\varphi_t(u)| = \exp(t \cdot c(u))$. Ebből következően a $\varphi_t(u)$ soha sem lehet nulla. Ha $t > 0$ és $h > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_t(u) - \varphi_{t-h}(u)\right| &= \left|\varphi_{t-h}(u)\right| \left|\frac{\varphi_{t-h+h}(u)}{\varphi_{t-h}(u)} - 1\right| = \\
&= \left|\varphi_{t-h}(u)\right| \left|\varphi_h(u) - 1\right| \leq \\
&\leq \left|\varphi_h(u) - 1\right| \to 0,
\end{aligned}$$

ha $h \searrow 0$. Következésképpen a $\varphi_t(u)$ balról is folytonos. Tehát a $\varphi_t\ (u)$ minden u-ra a t időváltozóban folytonos.

Lévy-folyamat exponenciális martingálja

Definition

Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálja

$$Z(t,u,\omega) \circeq \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi_t(u)}.$$

Egy X Lévy-folyamat exponenciális martingálján szokás az

$$Z(t,s,\omega) \circeq \frac{\exp(-sX(t,\omega))}{L_t(s)}$$

kifejezést is érteni.

Example

Wiener-folyamat exponenciális martingálja

$$
\begin{aligned}
\varphi_t(u) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(N\left(0,\sqrt{t}\right)\right)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(iu\sqrt{t}\left(N(0,1)\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{\left(u\sqrt{t}\right)^2}{2}\right) = \\
&= \exp\left(-t\frac{u^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
Z(t,u) = \exp\left(iuw(t) + t\frac{u^2}{2}\right).
$$

Ha a Fourier-transzformált helyett a Laplace-transzformáltat vesszük, akkor

$$
Z(t,s) = \exp\left(-sw(t) - t\frac{s^2}{2}\right).
$$

Exponenciális martingál

Example

Ha X tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az X-hez tartozó exponenciális martingál valóban martingál.

$$\mathbf{E}(Z_t(u)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)}\frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)}\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)} \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)}\mathbf{E}\left(\frac{\exp(iu\,(X(t,\omega)-X(s,\omega)))}{\varphi_{t-s}(u)}\right) = \frac{\exp(iuX(s,\omega))}{\varphi_s(u)}\cdot 1$$

A megállási opciókról szóló tétel

Theorem

Legyen $(X, \mathcal{F})$ *martingál, és legyenek* $\tau_1 \leq \tau_2$ *megállási idők. Ha a* τ_1, τ_2 *megállási idők korlátosak, vagyis ha van olyan* c *konstans, hogy* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c$, *akkor*

$$X(\tau_1) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}).$$

A korlátosság fontos

Example

A megállási opciókról szóló tételben a megállási idő korlátossága fontos.

Legyen w egy Wiener-folyamat és jelölje τ az $a = 1$ pont találati idejét. Mivel a w folytonos és majdnem minden kimenetelre a w trajektóriái nem korlátosak, ezért egy valószínűséggel minden trajektória előbb vagy utóbb átmetszi az $a = 1$ szintet. Így egy valószínűséggel $\tau < \infty$. Világos, hogy ebből $w(\tau) \overset{m.m.}{=} 1$ és így

$$\mathbf{E}(w(\tau)) = 1 > 0 = \mathbf{E}(w(0)),$$

ami miatt a megállási opciókról szóló tétel a $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$ szereposztással nem alkalmazható.

Egyenletes integrálhatóság

Definitions

Egy (X, A, μ) téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{|f_\alpha|\geq N} |f_\alpha| \, d\mu = 0.$$

Egy X martingált egyenletesen integrálható martingálnak mondunk ha az X értékeiből álló halmaz, vagyis az $(X_t)_t$ halmaz egyenletesen integrálható.

Világos, hogy ha f egy integrálható függvény, akkor a majorált konvergenciáról szóló tétel miatt

$$\lim_{N\to 0} \int_{|f|\geq N} |f| \, d\mu = 0.$$

Így minden véges számú integrálható függvényből álló halmaz egyenletesen integrálható.

Majorált halmazok egyenletesen integrálhatóak

Example

Ha a $\sup_\sigma |f_\alpha|$ mérhető és $\sup_\sigma |f_\alpha| \in L^p(\Omega)$, ahol $p \geq 1$, akkor az $(f_a)_\alpha$ család egyenletesen integrálható.

Ha $p = 1$, akkor az (f_a) családnak triviálisan van integrálható majoránsa: A definícióból világos, hogy ha egy $\mathcal{A}$ halmaznak van integrálható majoránsa, akkor az $\mathcal{A}$ halmaz triviálisan egyenletesen integrálható. Általában az L^p-norma monotonitása miatt minden $p \geq 1$ esetén

$$\|f_\alpha\|_p \leq \left\| \sup_\sigma |f_\alpha| \right\|_p ,$$

így az (f_a) korlátos az L^p térben. Meg lehet mutatni, hogy ha $p > 1$, akkor az L^p térben való korlátosságból következik az egyenletes integrálhatóság. Hangsúlyozni kell, hogy a $p = 1$ esetben ez nem igaz, tehát lehet példát mutatni, olyan L^1-ben korlátos halmazra, amely nem egyenletesen integrálható.

Feltételes várható értéke halmaza egyenletesen integrálható

Example

Ha ξ tetszőleges integrálható változó, és $(\mathcal{F}_\alpha)$ tetszőleges σ-algebrákból álló halmaz, akkor az

$$\eta_\alpha \mathrel{\hat{=}} \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_\alpha\right)$$

család egyenletesen integrálható. Speciálisan, ha X egy olyan martingál, amelyre $X(t) = \mathbf{E}\left(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t\right)$, akkor az X egyenletesen integrálható martingál.

Example

A Wiener-folyamatok nem egyenletesen integrálhatóak az egész $\mathbb{R}_+$ félegyenesen, de tetszőleges véges időszakaszon egyenletesen integrálhatóak. Minden martingál minden véges időszakaszon egyenletesen integrálható, a kérdés csak az, hogy az $\mathbb{R}_+$ időtengelyen vajon egyenletesen integrálható vagy sem?

Martingál konvergencia tétel és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Legyen X egy martingál az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen.

1. *Ha az X korlátos az $L^1(\Omega)$ térben, akkor van olyan $X(\infty) \in L^1(\Omega)$, hogy majdnem minden kimenetelre $\lim_{t \nearrow \infty} X(t) = X(\infty)$.*
2. *Ha az X ezen kívül még egyenletesen is integrálható, akkor a konvergencia $L^1(\Omega)$-ban is érvényes.*

Emlékeztetünk, hogy az egyenletes integrálhatóság implikálja az $L^1(\Omega)$ korlátosságot, de nem fordítva. Csak $p > 1$ esetén ekvivalens a kettő.

Martingál konvergencia tétel és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett X martingál pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha martingálként kiterjeszthető a $[0,\infty]$-re vagyis ha létezik $X(\infty)$, amelyre $L^1(\Omega)$-ben és majdnem mindenhol $X(t) \to X(\infty)$.

A feltételes várható érték $L^1(\Omega)$-ban folytonos. Az $L^1(\Omega)$-ban való konvergencia miatt

$$X(t) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(X(N) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\lim_{N\to\infty} X(N) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t).$$

Kiterjesztés tetszőleges megállási időkre

Egyenletesen integrálható martingál esetén az $X(\infty)$ értelmes, így az $X(\tau)$ is értelmes minden τ megállási idő esetén.

Theorem (Megállási opciókról szóló tétel)

Legyen $(X, \mathcal{F})$ egy egyenletesen integrálható martingál, és legyenek $\tau_1 \leq \tau_2$ tetszőleges megállási idők. Ekkor

$$X(\tau_1) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}).$$

A várható érték megmaradása és martingálok

Theorem

Egy X *jobbról reguláris és adaptált folyamat pontosan akkor martingál, ha minden* τ *korlátos megállási időre* $X(\tau) \in L^1(\Omega)$ *és* $\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(X(0))$. *Az egyenlőség pontosan akkor igaz minden megállási időre, ha az* X *egyenletesen integrálható martingál.*

Ha az X martingál, illetve egyenletesen integrálható martingál, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt az állítás teljesül.

A várható érték megmaradása és martingálok

Megfordítva. Legyen $s < t$ és $A \in \mathcal{F}_s$. A $\tau \circeq t\chi_{A^c} + s\chi_A$ megállási idő. A feltétel szerint

$$\mathbf{E}\left(X\left(0\right)\right) = \mathbf{E}\left(X_\tau\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right)\chi_{A^c}\right) + \mathbf{E}\left(X\left(s\right)\chi_A\right).$$

De a $\tau \equiv t$ szintén megállási idő, tehát

$$\mathbf{E}\left(X\left(0\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right)\chi_{A^c}\right) + \mathbf{E}\left(X\left(t\right)\chi_A\right).$$

A két oldalt összehasonlítva $\mathbf{E}\left(X\left(s\right)\chi_A\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right)\chi_A\right)$, vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right) \mid \mathcal{F}_s\right).$$

Az adaptáltság miatt az $X\left(s\right)$ $\mathcal{F}_s$-mérhető, így $X\left(s\right) = \mathbf{E}\left(X\left(t\right) \mid \mathcal{F}_s\right)$. Ha minden megállási idő megengedett, akkor a feltétel szerint az $X\left(\infty\right)$ létezik és integrálható, valamint a $t = \infty$ megengedett, következésképpen az X egyenletesen integrálható.

A martingálmegmaradási tétel

Theorem

Ha X martingál, és τ megállási idő, akkor az X^{τ} megállított folyamat is martingál.

Ha az X jobbról reguláris, akkor az X^{τ} megállított folyamat is jobbról reguláris. Miként az általános elmélet tárgyaláskor láttuk, az a X^{τ} megállított folyamat adaptált marad. Legyen ϕ korlátos megállási idő. A $\upsilon \stackrel{\circ}{=} \min(\phi, \tau)$ szintén korlátos. Mivel

$$\{\upsilon \leq t\} = \{\phi \leq t\} \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ezért a υ is megállási idő.

$$\mathbf{E}\left(X^{\tau}(\phi)\right) = \mathbf{E}\left(X(\upsilon)\right) = \mathbf{E}\left(X(0)\right) = \mathbf{E}\left(X^{\tau}(0)\right),$$

következésképpen az előző állítás miatt az X^{τ} martingál.

Megállási opciók és a jobbról való folytonosság

Example

A martingálok jobbról való folytonossága lényeges.

Legyen P egy λ paraméterű Poisson-folyamat és legyen $\pi(t) \circeq P(t) - \lambda t$ az úgynevezett kompenzált Poisson-folyamat. Miként láttuk a π martingál. Ha a folyamatot nem jobbról, hanem balról tesszük folytonossá, és a $\tau > 0$ a folyamat első ugrásának az időpontja, és $N > 0$, akkor a $T \circeq \tau \wedge N > 0$ egy korlátos megállási idő, de

$$\mathbf{E}(\pi(0)) = 0 < \mathbf{E}(-\lambda T) = \mathbf{E}(P_T - \lambda T) = \mathbf{E}(\pi_T).$$

Intervallumból való kilépés

Example

Ha $a < 0 < b$ és w egy Wiener-folyamat, akkor a w folyamat τ_a és τ_b találati idejére

$$\mathbf{P}\left(\tau_a < \tau_b\right) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbf{P}\left(\tau_b < \tau_a\right) = \frac{-a}{b-a}.$$

A Wiener–folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel nem korlátosak, tehát majdnem minden az origóból kiinduló trajektória valamelyik oldalon kilép az $[a, b]$ szakaszból, tehát

$$\mathbf{P}\left(\tau_a < \tau_b\right) + \mathbf{P}\left(\tau_b < \tau_a\right) = 1.$$

Intervallumból való kilépés II.

Ha $\tau \overset{\circ}{=} \min(\tau_a, \tau_b)$, akkor a w^τ korlátos martingál, ugyanis $a \leq w^\tau \leq b$. Minden korlátos martingál triviálisan egyenletesen integrálható. Így alkalmazhatjuk a megállási opciókról szóló tételt. A w_τ^τ vagy a, vagy b, ennek megfelelően

$$\mathbf{E}\left(w_\tau^\tau\right) = a\mathbf{P}\left(\tau_a < \tau_b\right) + b\mathbf{P}\left(\tau_b < \tau_a\right) = \mathbf{E}\left(w^\tau(0)\right) = 0.$$

Két egyenletünk van két ismeretlennel, amit megoldva éppen a keresett összefüggéseket kapjuk.

A kilépési idő Laplace-transzformáltja

Example

Valamely Wiener-folyamat valamely a időponthoz tartozó τ_a találati idejének Laplace–transzformáltja

$$L(s) \circeq \mathbf{E}(\exp(-s\tau_a)) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right), \quad s \geq 0.$$

Legyen $a > 0$. A Laplace-transzformálttal képzett

$$X(t) \circeq \exp\left(sw(t) - s^2\frac{t}{2}\right)$$

exponenciális martingál miként láttuk martingál, ezért az X^{τ_a} megállított folyamat is martingál. Ha $s \geq 0$, akkor

$$0 \leq X^{\tau_a}(t) \leq \exp\left(sa - \frac{s^2 t}{2}\right) \leq \exp(as),$$

ezért az X^{τ_a} korlátos martingál.

A kilépési idő Laplace-transzformáltja II.

Minden korlátos martingál egyenletesen integrálható, így alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel, tehát

$$\mathbf{E}\left(X_{\tau_a}^{\tau_a}\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(sa - \frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right) = \mathbf{E}\left(X^{\tau_a}(0)\right) = 1,$$

amiből

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{s^2\tau_a}{2}\right)\right) = \exp\left(-sa\right).$$

Egyszerű helyettesítéssel, ha $s \geq 0$

$$L(s) \triangleq \mathbf{E}\left(\exp\left(-s\tau_a\right)\right) = \exp\left(-a\sqrt{2s}\right).$$

Ha $a < 0$, akkor a $-w$ Wiener-folyamatra és az $|a| = -a >$ pontra megismételve a számolást

$$L(s) = \exp\left(-|a|\sqrt{2s}\right).$$