Sztochasztikus folyamatok

Poisson-folyamat

Medvegyev Péter
Corvinus Egyetem, Matematika tanszék

2008

Lévy-folyamat

Definition

A X folyamat Lévy-folyamat, ha

1. $X(0) = 0$,
2. az X független és stacionárius növekményű, és
3. a trajektóriák jobbról regulárisak, vagyis jobbról folytonosak, és minden időpontban van bal oldali határértékük.

Példák Lévy-folyamatokra

Example

A legegyszerűbb Lévy-folyamat az azonosan nulla folyamat. Ez a folyamat nyilván martingál is. Tetszőleges konstans értékű folyamat martingál, de nyilván csak akkor Lévy-folyamat, ha a konstans értéke nulla. Minden at alakú egyszerű lineáris trend Lévy-folyamat, de csak akkor lesz martingál, ha az a értéke nulla. Az $at + b$ alakú lineáris függvény általában sem nem martingál, sem nem Lévy-folyamat, de viszont szemimartingál.

Az erős Markov-tulajdonság

Theorem

Ha $\tau < \infty$ egy tetszőleges megállási idő, X egy tetszőleges Lévy-folyamat, akkor az

$$X^{*}(t,\omega) \mathrel{\hat{=}} X(\tau(\omega)+t,\omega) - X(\tau(\omega),\omega), \quad t \geq 0,$$

újraindított folyamat eloszlásban megegyezik az X-szel, és az X^{*} Lévy-folyamat az $\mathcal{F}_t^{*} \mathrel{\hat{=}} \mathcal{F}_{\tau+t}$ filtrációra nézve. Speciálisan az $\{X^{*}(t) : t \geq 0\}$ halmaz független az $\mathcal{F}_{\tau}$ megállított σ-algebrától.

A megállási opciókról szóló tétel alkalmazása

Legyen

$$Z(t,u,\omega) \circeq \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\mathbf{E}(\exp(iuX(t,\omega)))} \circeq \frac{\exp(iuX(t,\omega))}{\varphi(t,u)}.$$

A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z_{\tau+t} \mid \mathcal{F}_\tau) = Z_\tau.$$

amiből a kiemelési szabály miatt

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = 1.$$

A megállási opciókról szóló tétel alkalmazása

A τ nem feltétlenül korlátos, a Z nem egyenletesen integrálható, de mégis egyszerűen kitrükközhető. Vegyük a $\tau_n = \tau \wedge n$ megállási időt. Ez korlátos, így alkalmazható a tétel. Legyen $A \in \mathcal{F}_\tau$. Megmutatjuk, hogy $A_n \overset{\circ}{=} A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Valóban

$$\begin{aligned} A_n \cap \{\tau_n \leq t\} &= A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \wedge n \leq t\} = \\ &= A \cap \{\tau \leq t \wedge n\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

A feltételes várható érték definíciója alapján

$$\begin{aligned} \int_{A_n} \frac{Z(\tau_n + t)}{Z(\tau_n)} d\mathbf{P} &= \int_{A \cap \{\tau \leq n\}} \frac{Z(\tau \wedge n + t)}{Z(\tau \wedge n)} d\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A \cap \{\tau \leq n\}). \end{aligned}$$

A megállási opciókról szóló tétel alkalmazása

Átrendezve

$$\int_{A\cap\{\tau\le n\}} \frac{\exp\left(iu(X\left(\tau\wedge n+t\right)-X\left(\tau\wedge n\right)\right)}{\varphi\left(\tau\wedge n+t\right)\varphi\left(\tau\wedge n\right)^{-1}}d\mathbf{P}=\mathbf{P}\left(A\cap\{\tau\le n\}\right)$$

$$\int_{A\cap\{\tau\le n\}} \frac{\exp\left(iu(X\left(\tau\wedge n+t\right)-X\left(\tau\wedge n\right)\right)}{\varphi\left(t\right)}d\mathbf{P}=\mathbf{P}\left(A\cap\{\tau\le n\}\right)$$

$$\int_{A\cap\{\tau\le n\}} \exp\left(iu(X\left(\tau\wedge n+t\right)-X\left(\tau\wedge n\right)\right)d\mathbf{P}=$$

$$=\varphi\left(t\right)\mathbf{P}\left(A\cap\{\tau\le n\}\right).$$

A megállási opciókról szóló tétel alkalmazása

Most mát alkalmazhatjuk a domináns konvergencia tételt.

$$\int_A \exp\left(iu(X(\tau+t)-X(\tau)\right)d\mathbf{P} = \varphi(t)\,\mathbf{P}(A).$$

Ezt ismét átrendezve éppen

$$\int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau}d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A), \quad A \in \mathcal{F}_\tau,$$

vagyis

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = 1.$$

Az exponenciális tulajdonság használata

Ugyanakkor a Fourier-transzformáció "exponenciális" tulajdonsága miatt

$$\frac{\varphi_{\tau(\omega)}(u)}{\varphi_{\tau(\omega)+t}(u)} = \frac{1}{\varphi_t(u)}.$$

Ezek alapján ha $A \in \mathcal{F}_\tau$, akkor a feltételes várható érték definíciója miatt

$$\begin{aligned} \int_A \exp(iuX^*(t))\, d\mathbf{P} &\overset{\circ}{=} \varphi_t(u) \int_A \frac{\exp(iu(X(\tau+t) - X(\tau)))}{\varphi_t(u)} d\mathbf{P} = \\ &= \varphi_t(u) \int_A \frac{Z_{\tau+t}}{Z_\tau} d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)\, \varphi_t(u). \end{aligned}$$

Ha $A = \Omega$, akkor ebből az $X^*(t)$ és az $X(t)$ Fourier-transzformáltja azonos, így az eloszlásuk is azonos.

A monoton osztály tétel

Legyen $\mathcal{L}$ az olyan korlátos f függvények halmaza, amelyekre

$$\int_A f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) \int_\Omega f\left(X(t)\right) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) \int_\Omega f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P},$$

ahol $A \in \mathcal{F}_\tau$. Nyilvánvalóan az $\mathcal{L}$ λ-rendszer és az $\mathcal{L}$ tartalmazza az

$$x \mapsto \exp(iux), \quad u \in \mathbb{R}$$

trigonometrikus polinomok π-rendszerét. A monoton osztály tétel alapján az $\mathcal{L}$ tartalmazza a $\{\chi_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ alakú függvényeket.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A \cap \{X^*(t) \in B\}\right) &= \int_A \chi_B\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \int_A f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \\
&= \mathbf{P}(A) \int_\Omega f\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \\
&= \mathbf{P}(A) \int_\Omega \chi_B\left(X^*(t)\right) d\mathbf{P} = \\
&= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}\left(\{X^*(t) \in B\}\right),
\end{aligned}$$

tehát a $X^*(t)$ független az A-tól és így az $\mathcal{F}_\tau$-tól.

A Lévy-tulajdonság igazolása

Meg kell mutatni, hogy a X^* stationárius és független növekményű.

$$\begin{aligned} X^*(t+h) - X^*(t) &\triangleq (X(\tau+t+h) - X(\tau)) - (X(\tau+t) - X(\tau)) = \\ &= X(\tau+t+h) - X(\tau+t)\,. \end{aligned}$$

A tétel már belátott részét alkalmazva a $\tau + t$ megállási időre

$$X(h) \cong X(\tau+t+h) - X(\tau+t)\,,$$

amely független t-től, tehát a X^* stacionárius növekményű. Ugyancsak a tétel már belátott része alapján a $X^*(t+h) - X^*(t)$ független az $\mathcal{F}_t^* \triangleq \mathcal{F}_{\tau+t}$ σ-algebrától, vagyis a X^* független növekményű.

Záró megjegyzés, többdimenziós eloszlások

Érdemes hangsúlyozni, hogy csak az egydimenziós eloszlások azonosságát láttuk be. Az $uX^*(t)$ helyébe mindenhol az $\sum_{i=1}^{n} u_i X^*(t_i)$ összeget írva analóg módon belátható, hogy a X^* folyamat $(X^*(t_1), \ldots, X^*(t_n))$ véges dimenziós eloszlásai is megegyeznek a X megfelelő eloszlásaival. Speciálisan véges sok t_k időpont esetén a $(X^*(t_k))$ független az $\mathcal{F}_\tau$-tól, így a $\{X^*(t) : t \geq 0\}$ is független az $\mathcal{F}_\tau$-tól.

Poisson-folyamat

Definition

Poisson-folyamat alatt, definíció szerint, olyan monoton növekedő trajektóriákkal rendelkező Lévy-folyamatot értünk, amely értékkészlete majdnem minden ω kimenetelre a $\{0, 1, 2, \cdots\}$ egész számok halmaza. Hangsúlyozni kell, hogy az imént megadott definíció szerint, minden kimenetelre az $\mathbb{N}$ összes eleme felvételre kerül, vagyis nincsenek a folyamatnak egynél nagyobb ugrásai. Ennek megfelelően a Poisson-folyamatok éppen a Lévy-típusú számláló folyamatok.

Mivel a folyamat értékei egész számok, és mivel a trajektóriák jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel, ezért az egyes ugrások közötti szakaszok hossza pozitív. Mivel a folyamat a teljes $t \geq 0$ félegyenesen értelmezve van, és csak véges értéket vehet fel, az ugráspontok nem torlódhatnak véges értékhez. Az értékészletre tett megkötés alapján a folyamat trajektóriái egységnyi magasságú ugrásokat tartalmaznak.

Az első ugrás eloszlása exponenciális

Az első ugrás helyét megadó

$$\tau_1(\omega) \circeq \inf\{t : X(t,\omega) = 1\} = \inf\{t : X(t,\omega) > 0\} < \infty$$

megállási idő eloszlása exponenciális, ugyanis

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(\tau_1 > t+s) = \\
= \mathbf{P}(X(t+s) = 0) = \mathbf{P}(X(s) = 0, X(t+s) - X(s) = 0) = \\
= \mathbf{P}(X(s) = 0)\,\mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = 0) = \\
= \mathbf{P}(X(s) = 0)\,\mathbf{P}(X(t) = 0),
\end{gathered}$$

amiből alkalmas $0 < \lambda < \infty$ számra

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t) = \mathbf{P}(X(t) = 0) = \exp(-\lambda t).$$

Az ugrások között eltelt idő eloszlása exponenciális

Az erős Markov-tulajdonság miatt a $X_1^*(t) \circeq X(\tau_1 + t) - X(\tau_1)$ eloszlása azonos a $X(t)$ eloszlásával, így vehetjük a X második ugrásainak helyét megadó

$$\tau_2(\omega) \circeq \inf\{t : X(t + \tau_1(\omega), \omega) = 2\} = \inf\{t : X_1^*(t, \omega) > 0\} < \infty$$

megállási időt, és a τ_1 és a τ_2 függetlenek, és az eloszlásuk azonos. Hasonlóan folytatva kapjuk a következőt:

Theorem

Valamely Poisson-folyamat, esetén az egyes ugrások között eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A különböző ugrások között eltelt időkszakok hossza független, és időhossz eloszlása azonos.

Előrejelezhető megállási idők

Definition

Egy $\tau > 0$ megállási időt előrejelezhetőnek mondunk, ha létezik megállási idők egy (ρ_n) sorozata, amelyre $\rho_n < \tau$ és $\rho_n \nearrow \tau$. Ez nyilvánvalóan azt jelent, hogy a (ρ_n) sorozat előrejelzi a τ bekövetkezését.

Az ugrások nem előrejelezhetőek

Theorem

Egy Poisson-folyamat ugrásainak időpontjai nem előrejelezhetőek.

Ha például az első ugrás időpontját megadó τ_1 előrejlezhető lenne, akkor az

$$N_n^*(t) \circeq N(\rho_n + t) - N(\rho_n)$$

újraindított folyamatok mindegyike Poisson-folyamat lenne, és az eloszlásuk megegyezne az N eloszlásával. Az N_n^* első ugrása éppen a $\tau_1 - \rho_n$ időpontban következik be. De a τ_1-nek, és így mindegyik $\tau_1 - \rho_n$ megállási időnek létezik várható értéke amely az exponenciális eloszlás várható értéke alapján minden n-re éppen $1/\lambda > 0$. Így a majorált konvergencia tétel miatt

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\tau_1 - \rho_n) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty}(\tau_1 - \rho_n)\right) = 0,$$

ami lehetelen.

Gamma és béta függvények

Definition

A

$$\Gamma(x) \circeq \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t)\, dt, \quad x > 0$$

függvényt gamma függvénynek, a

$$B(x, y) \circeq \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt, \quad x, y > 0$$

függvényt béta függvénynek mondjuk.

A gamma és a béta függvény közötti kapcsolat

Example

Igazoljuk a

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

formulát!

A gamma függvény mellett vezessük be a

$$\Gamma(x,\lambda) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-\lambda t)\, dt, \quad x,\lambda > 0.$$

függvényt. Egyszerű $u = t\lambda$ helyettesítéssel

$$\Gamma(x,\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1} \exp(-u) \frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}.$$

Az egyik oldal kiszámolása

$s = t/(1-t)$ helyettesítéssel

$$
\begin{aligned}
I &\overset{\circ}{=} \int_0^{\infty} \Gamma(x+y, 1+s)\, s^{x-1} ds = \int_0^{\infty} \Gamma(x+y) \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^{\infty} (1+s)^{-(x+y)} s^{x-1} ds = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^{1} \left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^{1} \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-(x+y)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^{1} t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt \overset{\circ}{=} \Gamma(x+y)\, B(x,y).
\end{aligned}
$$

A másik oldal kiszámolása

Az integrandus folytonos és nem negatív, ezért alább a két integrál felcserélhető:

$$\begin{aligned}
I &\overset{\circ}{=} \int_0^\infty \Gamma\left(x+y, 1+s\right) s^{x-1} ds \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-t\left(1+s\right)\right) t^{x+y-1} s^{x-1} dtds = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-t\left(1+s\right)\right) t^{x+y-1} s^{x-1} dsdt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \int_0^\infty \exp\left(-ts\right) s^{x-1} dsdt \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \Gamma\left(x, t\right) dt = \\
&= \int_0^\infty t^{x+y-1} \exp\left(-t\right) \frac{\Gamma\left(x\right)}{t^x} dt \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \Gamma\left(x\right) \int_0^\infty t^{y-1} \exp\left(-t\right) dt = \Gamma\left(x\right) \Gamma\left(y\right).
\end{aligned}$$

Example

Számoljuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$$

integrált!

Az $x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)$ függvény az $x, t \geq 0$ tartományon folytonos, és nem negatív, ezért alkalmazható rá a Fubini-tétel.

$$\begin{aligned} I &\triangleq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dxdt = \\ &= \int_0^{\infty}\left[\frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{-2\left(1+t^2\right)}\right]_0^{\infty} dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A másik oldal

Az $x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)$ függvény az $x,t\geq 0$ tartományon folytonos, és nem negatív, ezért alkalmazható rá a Fubini-tétel. $u=xt$ helyettesítéssel

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^\infty\int_0^\infty x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)dtdx = \\
&= \int_0^\infty x\exp\left(-x^2\right)\int_0^\infty \exp\left(-\left(xt\right)^2\right)dtdx = \\
&= \int_0^\infty x\exp\left(-x^2\right)\int_0^\infty \exp\left(-u^2\right)\frac{du}{x}dx = \left(\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right)dx\right)^2,
\end{aligned}
$$

vagyis

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}.$$

A gamma függvény az 1/2 helyen

Example

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$u^2 = x$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &\circeq \int_0^\infty x^{-1/2} \exp(-x)\, dx = \int_0^\infty \left(u^2\right)^{-1/2} \exp\left(-u^2\right) 2u du = \\
&= 2\int_0^\infty \exp\left(-u^2\right) du = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-u^2\right) du = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Gamma eloszlás

Definition

Ha λ és a pozitív számok, akkor az

$$f(x) \circeq \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (a, λ) paraméterű gamma eloszlásnak hívjuk és $\Gamma(a, \lambda)$ módon jelöljük.

Béta eloszlás

Definitions

1. Ha α és β pozitív paraméterek, akkor az

$$f(x) \circeq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást (α, β) paraméterű béta eloszlásnak hívjuk és $B(a, \beta)$ módon jelöljük.

2. Ha α és β pozitív paraméterek, akkor a

$$g(x) \circeq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad x > 0$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást általánosított, vagy másodfajú béta eloszlásnak nevezzük. Az eloszlást $\widetilde{B}(\alpha, \beta)$-val fogjuk jelölni.

Example

$\Gamma(1, \lambda)$ éppen a λ paraméterű exponenciális eloszlás.

Example

χ_1^2, eloszlás éppen a $\Gamma(1/2, 1/2)$

Legyen $\xi \cong N(0,1)$ és határozzuk meg az $\eta \stackrel{\circ}{=} \xi^2$ eloszlását. Ha $x \leq 0$, akkor $F_\eta(x) = \mathbf{P}(\xi^2 < x) = 0$. Ha $x > 0$ akkor

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Deriválással, ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_{y=\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

A konvolúció

Theorem

Ha a ξ és az η változók függetlenek és a ξ sűrűségfüggvénye f és az η sűrűségfüggvénye g, akkor a $\xi + \eta$ rendelkezik sűrűségfüggvénnyel amely majdnem mindenhol azonos az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(x-z)\, dz$$

konvolúcióval.

A ξ és az η függetlenségét felhasználva

$$F_{\xi+\eta}(x) = \mathbf{P}(\xi+\eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi+\eta < x \mid \xi = z)\, dF(z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(z+\eta < x \mid \xi = z)\, dF(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\eta < x - z)\, f(z)\, dz$$

amit elég x szerint deriválni.

Deriválás az integráljel alatt

A deriválás indoklása az integráljel alatt nem problémamentes. Egyszerűbb megmutatni, hogy a sűrűségfüggvény integrálja éppen az eloszlásfüggvény: A Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,g(u-z)\,dzdu &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\int_{-\infty}^{x} g(u-z)\,dudz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\int_{-\infty}^{x-z} g(v)\,dvdz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\eta < x-z)\,f(z)\,dz\end{aligned}$$

ami az előzőek alapján éppen $F_{\xi+\eta}(u)$.

Nem negatív változók konvolúciója

Ha $\xi \geq 0$ és $\eta \geq 0$, akkor az integrál

$$\int_0^x f(z)\, g(x-z)\, dz$$

módon írható.

Gamma eloszlások összege

Theorem

Ha a τ_i független változók eloszlása $\Gamma(a_i, \lambda)$, akkor a $\sum_{i=1}^{n} \tau_i$ összeg eloszlása $\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \lambda\right)$.

$$\int_0^x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (x-t)^{a-1} \exp(-\lambda(x-t)) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-\lambda t)\, dt =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) \int_0^1 (x-xz)^{a-1} (xz)^{b-1} x dz =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \exp(-\lambda x) x^{a+b-1} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} \exp(-\lambda x) x^{a+b-1}.$$

A Poisson-folyamat ugrásainak időpontja gamma eloszlású

Corollary

A Poisson folyamat n-edik ugrásának időpontjának eloszlása $\Gamma(n, \lambda)$.

Corollary

A χ_n^2 *és a* $\Gamma(n/2, 1/2)$ *eloszlások megegyeznek.*

Corollary

Ha X Poisson-folyamat és λ az ugrások közötti eltelt idő paramétere, akkor

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)=n\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right).$$

Legyen $\sigma_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \tau_k$. A σ_{n+1} eloszlása $\Gamma\left(n+1,\lambda\right)$.

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n+1\right)=\mathbf{P}\left(\sigma_{n+1}>t\right)=\int_t^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma\left(n+1\right)}x^n\exp\left(-\lambda x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\lambda^{n+1}x^n}{\Gamma\left(n+1\right)}\frac{\exp\left(-\lambda x\right)}{-\lambda}\right]_t^\infty+\int_t^\infty n\frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma\left(n+1\right)}\exp\left(-\lambda x\right)dx=$$

$$=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right)+\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n\right).$$

$$\mathbf{P}\left(X\left(t\right)=n\right)=\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n+1\right)-\mathbf{P}\left(X\left(t\right)<n\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{n}}{n!}\exp\left(-\lambda t\right).$$

Transzformált valószínűségi változók

Legyen ξ valószínűségi változó és legyen φ egy olyan szigorúan monoton, folytonosan deriválható függvény, amelyre az $\eta \stackrel{\circ}{=} \varphi(\xi)$ értelmes. Tegyük fel, hogy a ξ sűrűségfüggvénye f. Számoljuk ki az η sűrűségfüggvényét! Ha a φ nő, akkor

$$\mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(\varphi(\xi) < x) = \mathbf{P}\left(\xi < \varphi^{-1}(x)\right) = F\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

amit deriválva, az összetett függvény deriválási szabálya miatt, az η sűrűségfüggvénye $f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x)$. Ha a φ csökken, akkor

$$\mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(\varphi(\xi) < x) = \mathbf{P}\left(\xi > \varphi^{-1}(x)\right) = 1 - F\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

amit deriválva az η sűrűségfüggvénye $-f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x)$. Mivel ilyenkor a képletben szereplő derivált negatív ezért a képlet

$$f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \left|\frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x)\right|$$

módon is írható.

A béta és a másodfajú béta kapcsolata

Theorem

Ha a ξ béta eloszlású, akkor az $\eta \circeq \xi / (1-\xi)$ másodfajú béta eloszlású. Ha η másodfajú béta eloszlású, akkor a $\xi \circeq \eta / (1+\eta)$ béta eloszlású.

Ha $\varphi(u) \circeq u / (1-u)$, akkor $\varphi^{-1}(x) = x / (1+x)$, és a sűrűségfüggvények transzformációs szabálya szerint

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{\beta-1} \frac{1}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}.
\end{aligned}
$$

A fordított irány igazolása analóg.

Hányados sűrűségfüggvénye

Legyen a ξ sűrűségfüggvénye f az η sűrűségfüggvénye legyen g. Mivel az η-nak van sűrűségfüggvénye, ezért az $\{\eta = 0\}$ esemény valószínűsége nulla, így a ξ/η értelmes. A teljes várható érték tétel miatt

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x \mid \eta = y\right) g(y)\, dy.$$

Felhasználva, hogy a ξ és az η függetlenek a feltétel behelyettesíthető, így

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x \mid \eta = y\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right).$$

Hányados sűrűségfüggvénye

Az y előjele lehet pozitív vagy negatív. Az előjeltől függően továbbszámolva, ha például $y < 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{y} < x\right) = \mathbf{P}\left(\xi > yx\right) = 1 - F\left(yx\right)$$

.Ezt visszaírva

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 - F\left(yx\right) g\left(y\right) dy.$$

Az x szerint deriválva sűrűségfüggvény

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f\left(yx\right) g\left(y\right) y dy = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(yx\right) g\left(y\right) \left|y\right| dy.$$

Gamma eloszlások hányadosa

Theorem

Ha $\xi \cong \Gamma(a, \lambda)$ *és* $\eta \cong \Gamma(b, \lambda)$ *valamint a* ξ *és az* η *függetlenek, akkor*

$$\frac{\xi}{\eta} \cong \widetilde{B}(a, b), \quad \frac{\xi}{\xi + \eta} \cong B(a, b).$$

A változók nem negatívitása és a korábban a gamma függvényről belátott azonosság miatt

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(uy)^{a-1}\exp(-\lambda uy)\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}\exp(-\lambda y)\,ydy =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}\exp(-\lambda y(u+1))\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\frac{\Gamma(a+b)}{(\lambda(u+1))^{a+b}} =$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}\frac{1}{(1+u)^{a+b}},$$

ami éppen a $\widetilde{B}(a,b)$.

Gamma eloszlások hányadosa

A második állítás igazolása a következő:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}<x\right)=\mathbf{P}\left(\frac{\xi/\eta}{1+\xi/\eta}<x\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<x\left(1+\frac{\xi}{\eta}\right)\right)=\mathbf{P}\left(\frac{\xi}{\eta}<\frac{x}{1-x}\right),$$

így deriválással az imént belátottak alapján a sűrűségfüggvény

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}\frac{1}{\left(1+x/(1-x)\right)^{a+b}}\frac{1}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}(1-x)^{a+b}\frac{1}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},$$

ami éppen a $B(a,b)$ sűrűségfüggvénye.

Poisson-folyamat ugrásai

Problem

Vegyünk egy n értéket. Jelölje σ_n valamely Poisson-folyamat n-edik ugrásának helyét. Mi lesz a

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \frac{\sigma_2}{\sigma_n}, \ldots, \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)$$

véletlenül választott $n-1$ pont eloszlása a $(0,1)$ intervallumban?

Theorem

Az eloszlás megegyezik a $(0,1)$ intervallumból vett egyenletes eloszlású mintából képzett rendezett minta eloszlásával.

Legyenek $(\xi_k)_{k=1}^n$ független azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\sigma_m \circeq \sum_{k=1}^m \xi_k$. Határozzuk meg az $\eta_k \circeq \sigma_k / \sigma_n$ változók eloszlását.

$$\mathbf{P}(\eta_1 < x) = \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} < x\right).$$

A ξ_1 eloszlása $\Gamma(1, \lambda)$, a $\sum_{k=2}^n \xi_k$ eloszlása $\Gamma(n-1, \lambda)$. Ebből az η_1 eloszlása $B(1, n-1)$. A $B(1, n-1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) \circeq \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)} x^{1-1}(1-x)^{n-2}, \quad x \in (0,1).$$

A $\Gamma(n) = (n-1)!$ értéket beírva

$$f_1(x) = (n-1)(1-x)^{n-2} \quad x \in (0,1).$$

Legyenek $(\tau_k)_{k=1}^{n-1}$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású változók és jelölje τ_1^* a legkisebb elemet, vagyis $\tau_1^* \overset{\circ}{=} \min \tau_k$. $\{\tau_1^* < x\}$ pontosan akkor, ha legalább egy elem az $(n-1)$-ből kisebb mint x, tehát

$$F_1(x) \overset{\circ}{=} \mathbf{P}(\tau_1^* < x) = 1 - (1-x)^{n-1}.$$

A τ_1^* sűrűségfüggvénye

$$F_1'(x) = (n-1)(1-x)^{n-2}$$

amely éppen azonos az $f_1(x)$ függvénnyel, vagyis az η_1 eloszlása azonos a τ_1^* eloszlásával.

Hasonlóan a $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$ eloszlása $\Gamma(k, \lambda)$ a $\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i$ eloszlása $\Gamma(n-k, \lambda)$ így az η_k eloszlása $B(k, n-k)$, amely sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}.$$

Határozzuk meg az τ_k^* eloszlásfüggvényét. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen először τ_k^* egyenletes eloszlásból származó n elemű rendezett minta k-dik eleme. A $\{\tau_k^* < x\}$ esemény ekvivalens avval, hogy legalább k változó kisebb mint x. Ebből

$$F_k(x) \triangleq \mathbf{P}(\tau_k^* < x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

A derivált kiszámolásának komplikáltsága miatt a sűrűségfüggvény meghatározása a következő:

$$\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} = \frac{\mathbf{P}\left(x \leq \tau_k^* < x+h\right)}{h}.$$

Tekintsük a $0 \leq x < x+h$ intervallumokat. A $\mathbf{P}\left(x \leq \tau_k^* < x+h\right)$ annak a valószínűsége, hogy legfeljebb $(k-1)$ változó kisebb mint x és legalább k változó kisebb mint $x+h$. Annak a valószínűsége, hogy r változó esik az $[x, x+h)$ intervallumba $h^r = o\left(h^{r-1}\right)$ nagyságrendű, így egyedül az $r=0$, illetve az $r=1$ eseteket kell megvizsgálnunk. Ha az $\{x \leq \tau_k^* < x+h\}$ esemény teljesül, akkor az $r=0$ lehetetlen, így a sűrűségfüggvény meghatározásakor egyedül az $r=1$ esetet kell kiszámolnunk.

Ilyenkor $k-1$ elem kisebb mint x, egy az $[x, x+h)$ intervallumban van és $n-k$ elem nagyobb mint x, vagyis

$$\mathbf{P}\left(x \leq \tau_k^* < x+h\right) = \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot h \cdot x^{k-1} \cdot (1-x-h)^{n-k} + \\ + o\left(h\right).$$

Ebből a sűrűségfüggvény

$$n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}\left(1-x\right)^{n-k}.$$

Ha n helyébe $(n-1)$-et írunk, akkor éppen az η_k sűrűségfüggvényét kapjuk.

Milyen gyakran jönnek a buszok?

Tegyük fel, hogy a buszok beérkezése λ paraméterű Poisson-folyamatot alkot, vagyis két busz közötti várakozási idő exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Mennyi időt kell várni a buszra?

Theorem

Az átlagos várakozási idő $1/\lambda$.

Ez egy oldalról triviális, ugyanis ha τ jelöli a kiérkezés időpontját megadó megállási időt, akkor az erős Markov-tulajdonság miatt a következő ugrásig egy λ paraméterű exponenciális eloszlású várakozási idővel kell számolni, amely várható értéke $1/\lambda$. Ugyanakkor az állításban az a meglepő, hogy a válasz nem $1/(2\lambda)$, ugyanis két busz között átlagban $1/\lambda$ idő van, mi pedig az $1/\lambda$ hosszú szakasz egy véletlen pontjában érkezünk a megállóba, vagyis kevesebbet kéne várnunk, mint az átlag. Heurisztikusan a magyarázat az, hogy a hosszabb várakozási intervallumokba nagyobb valószínűséggel érkezünk.

Milyen irányban járnak a buszok gyakrabban?

Gyakran az az érzésünk, hogy a másik irányba több busz megy. A látszólagos illúzió magyarázata, miszerint a másik irányba több busz megy abból ered, hogy mi csak egy buszt látunk, amire felszállunk, de a másik irányba $0, 1, 2, 3, \ldots$ buszt is láthatunk elhaladni. Mennyi a várakozási idő alatt látott buszok várható értéke? Jelölje a látott buszok számát K, .a várakozási időt τ A Poisson-feltétel miatt egy t hosszú szakaszon a várható darabszám λt Ha a másik irányba haladó buszok folyamata független az általunk megfigyeltől, és mind a kettő egy közös λ paraméterrel rendelkező Poisson-folyamat, akkor

$$\mathbf{E}\left(K\right) = \mathbf{E}(\mathbf{E}\left(K \mid \tau = t\right)) = \int_0^\infty \lambda t dF\left(t\right) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\lambda\tau}) = \lambda\mathbf{E}(\boldsymbol{\tau}) = 1,$$

ami nem $1/2$ mint ahogyan vártuk.

Átlagos várakozási idő

Az alábbiakban ezt a paradox jelenséget fogjuk általánosabb modellekben is kimutatni. Nem csak exponenciális várakozási időket engedünk meg és feltesszük, hogy a $[0, \infty)$ bármely pontjába azonos valószínűséggel érkezünk. Ez utóbbi azonban problémás, mert a $[0, \infty)$ félegyenes egy egyenletes eloszlás szerint véletlenül választott pontja nem világos, hogy mit jelent. A problémát t szerinti határértékkel oldjuk meg.

Átlagos várakozási idő

Definition

Mivel nem tételezzük fel az exponenciális várakozási időket ezért úgynevezett felújítási folyamatokról beszélünk.

Theorem

Tegyük fel, hogy az egymás utáni beérkezések között eltelt idők (τ_n) *sorozata azonos eloszlású és független változókból áll és a várakozási idők közös eloszlásának van m várható értéke és* σ *szórása. Ekkor a* $[0, \infty)$ *félegyenesre való véletlen kiérkezés esetén az átlagos várakozási idő*

$$\frac{m^2 + \sigma^2}{2m} = \frac{M_2}{2m},$$

ahol M_2 *jelöli a várakozási idő második momentumát. A* $[0, \infty)$ *félegyenesre való véletlen kiérkezést a* $[0, t]$ *szakaszra kapott értékek* $t \rightarrow \infty$ *szerint vett határértékeként definiáljuk. A konvergencia majdnem mindenhol és* $L^1(\Omega)$ *értelemben is teljesül.*

Átlagos várakozási idő

Example

Ha az N egy Poisson-folyamat, akkor $\sigma^2 = 1/\lambda$. Ilyenkor

$$\frac{m^2 + \sigma^2}{2m} = \frac{1/\lambda^2 + 1/\lambda^2}{2/\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

miként azt már a tárgyalás elején az erős Markov-tulajdonság alapján sejtettük. Ugyanakkor csak ha $\sigma = 0$, akkor lehet az átlagos várakozási idő $m/2$.

Átlagos várakozási idő

Rögzítsünk egy $[0, t]$ szakaszt, amelyen véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint kimegyünk a megállóba. Az várakozási időt megadó $E(s, \omega)$ folyamat trajektóriái fűrészfog alakú függvények, amelyek magasságai a két busz közötti időbeli távolság. A fűrészfog fogai véletlenszerű egyenlő oldalú, derékszögű háromszögek. A kiérkezés egyenletes eloszlású a $[0, t]$ szakaszon, így a kiérkezés idő sűrűségfüggvényének magassága $1/t$, vagyis a várható várakozási idő

$$\int_{\Omega} \frac{1}{t} \int_0^t E(s, \omega)\, ds d\mathbf{P}(\omega)$$

ugyanis minden ω kimenetelre egy adott $E(s, \omega)$ trajektóriára az $f(s) = 1/t$ sűrűségfüggvény esetén a várható értéke a várakozásnak

$$\int_0^t E(s, \omega) f(s)\, ds = \frac{1}{t} \int_0^t E(s, \omega)\, ds.$$

Feltettük továbbá, hogy a buszok folyamata és a kiérkezés függetlenek, így az együttes eloszlást az eloszlások szorzata adja.

Átlagos várakozási idő

Lemma

Ha a várakozási idők közös eloszlásának m várható értéke pozitív és N az eseményeket számláló folyamat, akkor majdnem minden kimenetelre $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$, *vagyis ilyenkor a beérkezési időpontok sorozata egy valószínűséggel nem torlódik.*

Ha valamely ω kimenetelre $\lim_{t\to\infty} N(t,\omega) < \infty$, akkor erre a kimenetelre véges időtartam alatt végtelen sok esemény következne be. Ilyenkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tau_k(\omega) < \infty,$$

ami nulla valószínűségű eseménytől eltekintve ellentmond a nagy számok törvényének amely szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau_k(\omega) = m > 0.$$

Átlagos várakozási idő

Lemma

Jelölje N a beérkezésekhez tartozó számláló folyamatot. Ha az egymás utáni időtartamok közös eloszlásának van $0 < m < \infty$ *várható értéke, és az egyes intervallumok függetlenek, akkor majdnem mindenhol*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{m}.$$

Jelölje σ_n az n-edik esemény időpontját. $N(t)$ a t időpontig bekövetkezett események száma, és az utolsó esemény nyilván t előtt következett be és a következő t után fog bekövetkezni, ezért

$$\begin{aligned} \sigma_{N(t)} &\leq t < \sigma_{N(t)+1} \\ \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} &\leq \frac{t}{N(t)} < \frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)} \end{aligned}$$

Átlagos várakozási idő

De a nagy számok törvénye miatt, felhasználva, hogy az $N(t)$ végiglépked az $n = 1, 2, \ldots$ sorozaton ugyanis $m > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} \tau_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau_k = \mathbf{E}(\tau) = m,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)-1} = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{N(t)-1} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} = m$$

amiből az állítás már evidens.

Átlagos várakozási idő

Lemma

Legyen H_n az n-edik derékszögű háromszög.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{N(t)}\sum_{k=1}^{N(t)}\int_0^t H_k(s)\,ds=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t H_k(s)\,ds=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_k^2}{2}=\frac{\mathbf{E}\left(\tau^2\right)}{2}$$

ahol τ jelöli a τ_k változók bármelyikét és a konvergencia majdnem mindenhol értelemben értendő.

A nagy számok törvénye alapján a határérték az egyes ciklusokat alkotó háromszögek integráljának várható értéke. Adott τ_k esetén az egyenlő oldalú derékszögű háromszög két oldala τ_k, így a területe $\tau_k^2/2$. Ebből

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\tau H_k(s)\,ds\right)=\mathbf{E}\left(\frac{\tau_k^2}{2}\right).$$

Átlagos várakozási idő

Legyen H_n az n-edik háromszög és E a várakozási idők fűrészfog alakú folyamata. A nagy számok törvénye alapján majdnem mindenhol

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E(s,\omega)\,ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{n=0}^{N(t)} H_n(s)\,ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{N(t)}\int_0^t H_n(s)\,ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\frac{\sum_{n=0}^{N(t)}\int_0^t H_n(s)\,ds}{N(t)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^{N(t)}\int_0^t H_n(s)\,ds}{N(t)} =$$

$$= \frac{1}{m}\mathbf{E}\left(\frac{\tau^2}{2}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2+\sigma^2}{2}\right),$$

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

A majdnem mindenhol konvergencia mellett belátjuk az $L^1(\Omega)$-ban való konvergenciát.

Definition

Egy (X, A, μ) téren értelmezett mérhető függvényekből álló valamely $(f_\alpha)_\alpha$ függvényhalmazt egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{|f_\alpha|\geq N} |f_\alpha| \, d\mu = 0.$$

Theorem

Ha a μ mérték véges, az (f_n) függvények egyenletesen integrálhatóak, és $f_n \to f$, akkor az f is integrálható, és

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu, \quad \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Theorem

Ha az X alaptér mértéke véges, akkor egy (f_α) függvényhalmaz pontosan akkor egyenletesen integrálható, ha

1. *az* $\left(\int_X |f_\alpha|\, d\mu\right)_\alpha$ *halmaz korlátos, vagyis az* (f_α) *korlátos az* $L^1(\mu)$ *térben és*
2. $\mu(A) \to 0$ *esetén* $\int_A |f_\alpha|\, d\mu \to 0$ *az* α *szerint egyenletesen, vagyis*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_\alpha \left(\int_A |f_\alpha|\, d\mu\right) = 0.$$

Véges mérték esetén az L^p, $p > 1$ *korlátosságból következik az* L^1 *korlátosság, de nem fordítva.*

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Evidens módon

$$\begin{aligned}\int_A |f_\alpha|\, d\mu &= \int_A |f_\alpha|\, \chi\left(|f_\alpha| \le N\right) d\mu + \int_A |f_\alpha|\, \chi\left(|f_\alpha| > N\right) d\mu \le \\ &\le N\mu\left(A\right) + \int_{\{|f_\alpha|>N\}} |f_\alpha|\, d\mu.\end{aligned}$$

Ha az (f_α) egyenletes integrálható, akkor elég nagy N-re a második tag $\varepsilon/2$ alá hozható. Ha $A = X$, akkor az alaptér végessége miatt a kifejezés korlátos, következésképpen teljesül az 1. Ha $\mu\left(A\right) \to 0$, akkor az első tag is $\varepsilon/2$ alá vihető, vagyis teljesül a 2. is.

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Megfordítva legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ olyan, hogy minden α-ra $\int_A |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon$, ha $\mu(A) < \delta$. A Markov-egyenlőtlenség és az első feltétel alapján

$$\mu(|f_\alpha| > N) \leq \frac{1}{N} \int_X |f_\alpha| \, d\mu \leq \frac{K}{N} \to 0,$$

amiből elég nagy N-re tetszőleges α-ra $\mu(|f_\alpha| > N) < \delta$, vagyis a második feltétel miatt

$$\int_{\{|f_\alpha| > N\}} |f_\alpha| \, d\mu < \varepsilon,$$

következésképpen az $(f_\alpha)_\alpha$ egyenletesen integrálható.

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

A határérték és az integrál felcserélését általában a pontonkénti konvergencia, vagy a majdnem mindenhol való konvergencia esetében szokás tárgyalni, ugyanis ezek a mértékelmélet természetes konvergencia fogalmai. Most az $f_n \to f$ konvergencián a sztochasztikus konvergenciát értjük. Véges mértékű halmazokon a pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az eredmények speciálisan alkalmazhatók a majdnem mindenhol való konvergenciára is. Triviálisan

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

ezért elegendő az $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ konvergenciára koncentrálni.

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Mivel véges mértékű halmazon az egyenletes integrálhatóságból következik az L^1 korlátosság, és a sztochasztikusan konvergens sorozatoknak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért a Fatou-lemma alapján

$$\int_X |f|\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty,$$

vagyis az f integrálható, speciálisan az $(f_n - f)_n$ is egyenletesen integrálható.

Valószínűségi mértékek és az egyenletes integrálhatóság

Triviálisan

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon \mu(X) + \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu.$$

A sztochasztikus konvergencia miatt $\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$, amiből viszont a korábbi kritérium második pontja, vagyis ismételten az egyenletes integrálhatóság alapján a jobb oldali összeg második tagja is tetszőlegesen kicsivé tehető, amivel a tételt bizonyítottuk.

Átlagos várakozási idő

Mivel

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E\left(s,\omega\right)ds=\frac{m^2+\sigma^2}{2m}$$

majdnem mindenhol, elég megmutatni, hogy az $\frac{1}{t}\int_0^t E\left(s,\omega\right)ds$ egyenletesen integrálható, ugyanis. sajnos a monoton és a majorált konvergencia kritérium nem használható. Első lépésként azonban a problémát egyszerűsíthetjük.

Lemma (Wald-azonosság)

Legyen $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ *azonos eloszlású változók sorozata és* τ *egy megállási idő. Ha* $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *és a* ξ_k *független az* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \mathcal{F}_{k-1}$ σ*-algebráktól, akkor*

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(\tau)\,\mathbf{E}(\xi),$$

ahol ξ *a* ξ_k *változók bármelyike, feltéve, hogy a szorzatban szereplő két várható érték véges.*

Vegyük észre, hogy feltéve, hogy a számolás során minden rendben van.

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \chi(\tau \geq k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi_k \chi(\tau \geq k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi_k)\,\mathbf{E}(\chi(\tau \geq k)) = \mathbf{E}(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geq k) = \mathbf{E}(\xi)\,\mathbf{E}(\tau)$$

Átlagos várakozási idő

1. Mivel a τ diszkrét

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \mathbf{P}(\tau = l) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}(\tau = k) = \mathbf{E}(\tau) .$$

2. $\{\tau \geq k\} = \{\tau < k\}^c = \{\tau \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$. Ebből, a feltett függetlenség miatt

$$\mathbf{E}(\xi_k \chi(\tau \geq k)) = \mathbf{E}(\xi_k) \mathbf{E}(\chi(\tau \geq k))$$

3. A gondolatmenetet az $|X|$-re alkalmazva látható, hogy alkalmazható a Fubini-tétel.

Átlagos várakozási idő

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{t}\int_0^t E(s,\omega)\,ds\right) = \frac{1}{2t}\mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{N(t)}\tau_k^2\right) = $$
$$= \frac{\mathbf{E}(N(t))}{t}\frac{\mathbf{E}(\tau)}{2}$$

ugyanis $\{N(t) \leq n\} = \sigma(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \mathcal{F}_n$ és τ_{n+1}^2 független az $\mathcal{F}_n$-től így alkalmazható a Wald-egyenlőtlenség. Elegendő tehát csak az $N(t)/t \to 1/m$ határértéket vizsgálni.

Lemma (Elemi felújítási tétel)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}\left(N\left(t\right)\right)}{t} = \frac{1}{m}.$$

A bizonyításhoz meg kell mutatni, hogy az $X\left(t\right) \circeq N\left(t\right)/t$ egyenletesen integrálható. Legyen $\rho_n = a\chi\left(\tau_n > a\right)$, ahol $0 < F\left(a\right) = p < 1$. Ha a τ_n nem egy triviális valószínűség változó, akkor ilyen a létezik. Legyen $\widehat{N}$ a ρ_n-ek által konstruált számláló folyamat. Mivel $\rho_n \leq \tau_n$, ezért $N\left(t\right) \leq \widehat{N}\left(t\right)$, így elegendő belátni, hogy az

$$\widehat{X}\left(t\right) = \frac{\widehat{N}\left(t\right)}{t}$$

egyenletesen integrálható.

Átlagos várakozási idő

A (ρ_n) megállási idők által generált változók az na időpontokban következhetnek be minden lépésben p valószínűséggel jöhet az ugrás..Így az első ugrásig eltelt idő geometria eloszlást követ p siker valószínűséggel. A következő ugrásig eltelt idő ettől független vele azonos eloszlású szintén geometriai eloszlású változó. Vagyis az $\widehat{N}$ geometriai várakozási időkhöz tartozó számláló folyamat.

$$
\begin{aligned}
\widehat{N}(t) &\leq \sum_{k=1}^{[t/a]} G_k(p) = S(t). \\
\mathbf{E}(S(t)) &= \left[\frac{t}{a}\right] \mathbf{E}(G_k(p)) \\
\mathbf{D}^2(S(t)) &= \left[\frac{t}{a}\right] \mathbf{D}^2(G_k(p)) \\
\mathbf{E}\left(S^2(t)\right) &= \left[\frac{t}{a}\right] \mathbf{D}^2(G_k(p)) + \left[\frac{t}{a}\right]^2 \mathbf{E}^2(G_k(p)) \leq \\
&\leq c_1 t + c_2 t^2.
\end{aligned}
$$

Átlagos várakozási idő

Így ha $t \geq 1$, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{N(t)}{t} > x\right) &\leq \frac{\mathbf{E}\left(N^2(t)\right)}{(tx)^2} \leq \frac{\mathbf{E}\left(S^2(t)\right)}{(tx)^2} \leq \frac{c_1 t + c_2 t^2}{(tx)^2} \leq \\ &\leq \frac{c_1 t^2 + c_2 t^2}{(tx)^2} \leq \frac{c_1 + c_2}{x^2} = \frac{c}{x^2}.\end{aligned}$$

Átlagos várakozási idő

Ha $\xi \geq 0$, akkor a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi) &= \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty \int_0^x 1 dt dF(x) = \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty 1 dF(x)\, dt = \int_0^\infty 1 - F(t)\, dt\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{E}\left(\frac{N(t)}{t}\chi\left(\frac{N(t)}{t} > x\right)\right) = \int_x^\infty 1 - F_t(t)\, dt \leq \int_x^\infty \frac{c}{t^2} dt = \frac{c}{x} \to 0,$$

vagyis az $N(t)/t$ egyenletesen integrálható, így a majdnem mindenhol konvergencia mellett igaz az $L^1(\Omega)$ konvergencia is.

A várakozási idő paradoxon

Theorem

Legyenek a (τ_k) *időtartamok tetszőleges, azonos eloszlásúak és függetlenek. A* σ_n *legyen az n-dik ugrás időpontja. Rögzítsünk egy* s *időpontot. Az* s *időpontig bekövetkező ugrások száma* $N(s)$ *az utolsó,* s *előtti ugrás helye nyilván* $\sigma_{N(s)}$*. A következő ugrás* $\tau_{N(s)+1}$ *idő múlva lesz vagyis az időszak hossza, amelybe az* s *beesik* $\tau_{N(s)+1}$*. A meglepő egyenlőtlenség a következő:*

$$\mathbf{P}\left(\tau_{N(s)+1} > t\right) \geq \mathbf{P}\left(\tau > t\right),$$

ahol a τ *a* (τ_k) *változók bármelyike. Vagyis a fix* s *pontot tartalmazó véletlen szakasz hossza sztochasztikusan dominálja az eredeti ugráshosszakat.*

A várakozási idő paradoxon

Lemma

Legyen ξ tetszőleges változók és f és g azonos irányban monoton függvények. Ilyenkor $\operatorname{cov}(f(\xi), g(\xi)) \geq 0$.

Legyen η egy a ξ-től független, vele azonos eloszlású változó. Az azonos monotonitásra tett feltétel miatt

$$(f(\xi) - f(\eta))(g(\xi) - g(\eta)) \geq 0$$

. A két oldalon várható értéket véve, kihasználva, hogy a függetlenségből következik a korrelálatlanság

$$0 \leq \mathbf{E}((f(\xi) - f(\eta))(g(\xi) - g(\eta))) =$$
$$= \mathbf{E}(f(\xi)g(\xi)) - \mathbf{E}(f(\xi)g(\eta)) - \mathbf{E}(f(\eta)g(\xi)) + \mathbf{E}(f(\eta)g(\eta)) =$$
$$= 2(\mathbf{E}(f(\xi)g(\xi)) - \mathbf{E}(f(\xi))\mathbf{E}(g(\xi))) = 2\operatorname{cov}(f(\xi), g(\xi)).$$

A várakozási idő paradoxon

Rögzítsünk egy t és egy s pontot. $f(x) \overset{\circ}{=} \chi(x > t)$, $h(x, y) = \chi(y \leq s < x + y)$. Vegyük észre, hogy az f és minden fix y-ra a h az x növekedő függvénye.

$$\mathbf{P}(\tau_{n+1} > t, \sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n) = \mathbf{E}(f(\tau_{n+1}) h(\tau_{n+1}, \sigma_n)) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) h(x, y) \, dF(x) \, dG_n(y) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{E}(f(\tau_{n+1}) h(\tau_{n+1}, y)) \, dG_n(y) \geq$$

$$\geq \int_0^\infty \mathbf{E}(f(\tau_{n+1})) \mathbf{E}(h(\tau_{n+1}, y)) \, dG_n(y) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau_{n+1} > t) \mathbf{P}(y \leq s < \tau_{n+1} + y) \, dG_n(y) =$$

$$= \mathbf{P}(\tau_{n+1} > t) \int_0^\infty \mathbf{P}(y \leq s < \tau_{n+1} + y) \, dG_n(y) =$$

$$= \mathbf{P}(\tau_{n+1} > t) \mathbf{P}(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n)$$

Az utolsó azonosság a teljes várható érték tétel miatt evidens, ugyanis felhasználva, hogy a τ_{n+1} független a σ_n-től

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n\right) &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n \mid \sigma_n = y\right) dG_n\left(y\right) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(y \leq s < \tau_{n+1} + y\right) dG_n\left(y\right).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ebben a lépésben használtuk ki a (τ_n) elemeinek függetlenségét. Az egyenlőséget a transzformált változók várható értékére vonatkozó képlettel is igazolhatjuk, ugyanis

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\left(y \leq s < \tau_{n+1} + y\right) dG_n\left(y\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi\left(y \leq s < x + y\right) dF\left(x\right) dG_n$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty h\left(x, y\right) dF\left(x\right) dG_n\left(y\right) = \mathbf{E}\left(h\left(\tau_{n+1}, \sigma_n\right)\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\chi\left(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n\right)\right) = \mathbf{P}\left(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n\right)$$

ugyanis a τ_{n+1} és a σ_n függetlensége miatt a (σ_n, τ_{n+1}) eloszlása éppen a szorzatmérték.

A várakozási idő paradoxon

Az azonos eloszlás feltételét használva és kihasználva, hogy a $\{N(s) = n\}$ egy teljes eseményrendszer

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\tau_{N(s)+1} > t\right) &= \sum_n \mathbf{P}\left(\tau_{n+1} > t, N(s) = n\right) = \\
&= \sum_n \mathbf{P}\left(\tau_{n+1} > t, \sigma_n \leq s < \sigma_{n+1}\right) = \\
&= \sum_n \mathbf{P}\left(\tau_{n+1} > t, \sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n\right) \geq \\
&\geq \sum_n \mathbf{P}\left(\tau_{n+1} > t\right) \mathbf{P}\left(\sigma_n \leq s < \tau_{n+1} + \sigma_n\right) = \\
&= \mathbf{P}(\tau > t) \sum_n \mathbf{P}(N(s) = n) = \mathbf{P}(\tau > t).
\end{aligned}
$$